Ružica Soldo · Ivan Benić · Melita Crnković · Tea Borković

Udžbenik iz Matematike za prvi razred četverogodišnjih strukovnih škola

1

Ogledni separat

©Alfa

matematika

dr. sc. Ružica Soldo · Ivan Benić · Melita Crnković · Tea Borković

matematika 1

Udžbenik iz Matematike za prvi razred četverogodišnjih strukovnih škola

OGLEDNO IZDANJE
©Alfa

1. izdanje

ALFA

2025.

1. OPERACIJE SA SKUPOVIMA I SKUPOVI BROJEVA

1.1. Skupovi
1.2. Operacije sa skupovima
1.3. Prirodni i cijeli brojevi
1.4. Racionalni brojevi
1.5. Realni brojevi
1.6. Brojevni pravac. Apsolutna vrijednost i intervali
1.7. Računske operacije u skupovima brojeva

Ishod učenja

MAT SSŠ A.1.1. i MAT SSŠ B.1.1.
Provodi operacije sa skupovima.

✔ Moći ćeš:

- prikazati skupove uz pomoć Vennovog dijagrama
- odrediti kardinalni broj skupa
- objasniti podskup, uniju, presjek i razliku podskupova skupa realnih brojeva te ih zapisati matematičkim simbolima
- riješiti jednostavnije problemske zadatke koristeći računske operacije sa skupovima.

Ishod učenja

MAT SSŠ A.1.2.
Računa s realnim brojevima.

✔ Moći ćeš:

- primijeniti svojstva skupova prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih i realnih brojeva pri računanju vrijednosti brojevnih izraza
- procijeniti, zaokružiti i računati u problemskim situacijama različitih razina složenosti
- usporediti realne brojeve
- zapisati nejednakosti uz pomoć intervala i obratno
- prikazati intervale na brojevnom pravcu
- povezati apsolutnu vrijednost s udaljenosti točaka na brojevnom pravcu.

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

1. OPERACIJE SA SKUPOVIMA I SKUPOVI BROJEVA

1.1. Skupovi

PRISJETI SE!

1. Zapiši skup neparnih brojeva većih od 31 i manjih od 45 te odredi broj elemenata tog skupa.

2. Neka je $A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$. Odaberi istinite tvrdnje.

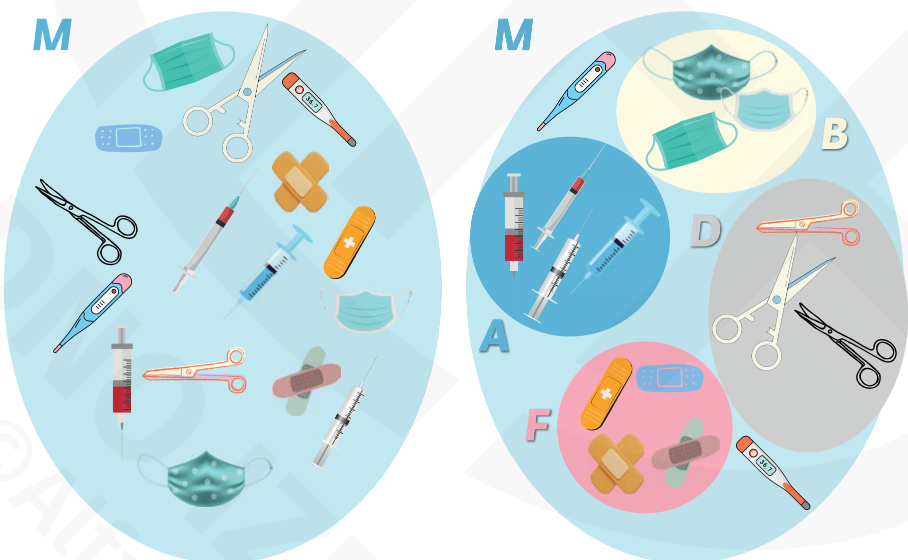
a) $8 \in A$ **b)** $18 \in A$ **c)** $14 \notin A$ **d)** $28 \notin A$

e) $A = \{4\ 8\ 12\ 16\ 20\ 24\ 28\ 32\}$ **f)** $A = \{8, 16, 4, 12, 28, 24, 20, 32\}$

Na slici vidimo skup medicinskog pribora označen slovom *M*.

Skup *M* razvrstali smo na **podskupove** *A*, *B*, *D*, *F* koji sadrže škare, flastere, štrcaljke i zaštitne maske.

Svaki element skupa *A* ujedno je i element skupa *M* i pišemo $A \subseteq M$.



Skupovi *A* i *F* imaju po 4 elementa, a skupovi *B* i *D* po 3 elementa.

Broj elemenata skupa *M* naziva se **kardinalni broj skupa *M*** i označava ***card*** (***M***).

Skup koji nema ni jedan element naziva se **prazni skup** i označava $\emptyset$.

Skupove zorno prikazujemo **Vennovim dijagramima**.

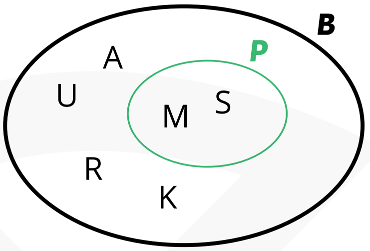
PRIMJER 1.

Prikažimo Vennovim dijagramom skup B čiji su elementi slova u riječi SUMRAK i jedan njegov podskup P. Zapišimo skupove B i P.

✓ Rješenje:

$B = \{S, U, M, R, A, K\}$

$P = \{S, M\}$



ZADATAK 1. Prikaži Vennovim dijagramom skup A parnih brojeva većih od 7 i manjih od 21 te jedan njegov podskup B. Zapiši skupove A i B.

ZADATAK 2. Prikaži Vennovim dijagramom skup C višekratnika broja 5 manjih od 30 i jedan njegov podskup D. Zapiši skupove C i D.

PRIMJER 2.

Odredimo u kojem su odnosu skupovi:

a) $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$, $B = \{8, 16, 24, 32\}$

b) $C = \{11, 10, 15\}$, $D = \{11, 12, 13, 14, 15\}$

c) $E = \{5, 25, 55, 35, 45\}$, $F = \{25, 35, 5, 55, 45\}$.

✓ Rješenje:

a) $B \subseteq A$ jer je svaki element iz B ujedno i u A.

b) $C \nsubseteq D$ i $D \nsubseteq C$ jer svaki od skupova ima elemente koji nisu elementi drugog skupa.

c) $E = F$ jer imaju sve elemente jednake.

ZADATAK 3. Zadani su skupovi $K = \{3, 1, 13, 31\}$ i $L = \{1, 3, 13, 33\}$. Je li $L \subseteq K$? Je li $K \subseteq L$?

ZADATAK 4. Zadani su skupovi $A = \{m, a, t, o\}$ i $B = \{m, a, t, k, o\}$. Je li $A \subseteq B$? Je li $B \subseteq A$?

ZADATAK 5. Neka je A skup svih znamenki broja 6 146 058, a B skup svih znamenki broja 2 514 608. Zapiši skupove A i B. Je li skup A podskup skupa B? Odgovor zapiši matematičkim simbolom.

ZADATAK 6. Neka je P skup svih slova u riječi ZAGREB, a Q skup svih slova u riječi BREZA. Zapiši skupove P i Q. U kakvom su odnosu ta dva skupa? Odgovor zapiši matematičkim simbolom.

OGLEDNI PRIMJERAK ©Alfa

PRIMJER 3.

Odredimo kardinalni broj skupa:

a) $D = \{a, b, c, d, e, fgh\}$

b) $H = \{9, 8, 7, 6\}$

c) $P = \emptyset$.

Rješenje:

a) $card\ (D) = 6$

b) $card\ (H) = 4$

c) $card\ (P) = 0$

ZADATAK 7. Odredi kardinalni broj skupa $A = \{MAJA\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots 99, 100\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$

ZADATAK 8. Odredi kardinalni broj skupa $E = \{j, u, t, r, o\}$, $F = \{2, 4, 6, \dots 98, 100\}$, $G = \{0\}$.

ZADATAK 9. Zadan je skup $B = \{10, 20, 30, \dots 90, 100\}$.
Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\{50, 60, 80\} \subseteq B$ b) $card\ (B) = 100$ c) $0 \in B$ d) $\{10, 110\} \subseteq B$ e) $\{20\} \in B$ f) $40 \subseteq B$

ZADATAK 10. Skup N čine slova riječi STRUKA. Zapiši skup N.
Zaokruži istinite tvrdnje.

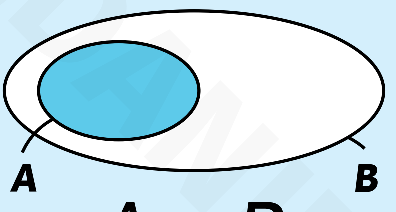
a) $\{S, T, R, U, K\} \subseteq N$ b) $A \subseteq N$ c) $U \in N$ d) $\{RUKA\} \subseteq N$ e) $\{S\} \in N$ f) $card\ (N) = 5$

ZADATAK 11. Zadana je dužina $\overline{AB}$ i na njoj točke C i D. Je li dužina $\overline{CD}$ podskup dužine $\overline{AB}$? Ispiši sve istaknute dužine koje su podskup dužine $\overline{AB}$.

ZADATAK 12. Zadan je skup $M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Ispiši sve njegove podskupove P kojima je:

a) $card\ (P) = 1$ b) $card\ (P) = 2$ c) $card\ (P) = 3$.

UPAMTI!



$A \subseteq B$

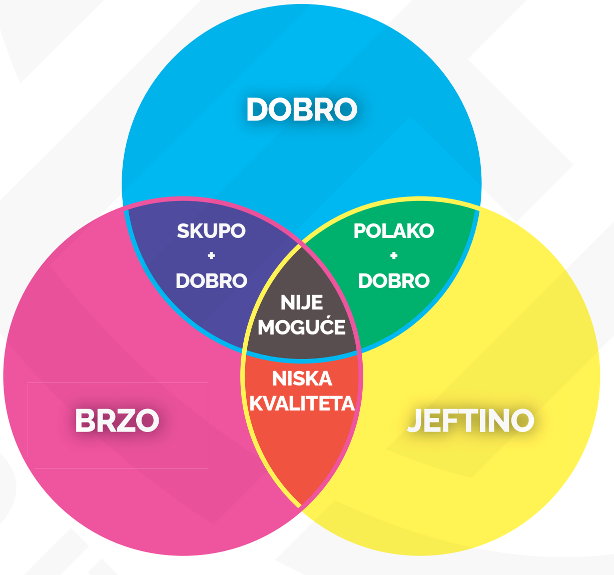
IZAZOV! Društvene mreže internetska su usluga s ciljem povezivanja korisnika. Najčešće se koriste Facebook, YouTube, Instagram, TikTok, LinkedIn, Pinterest, X...

Osmisli skup *M* čiji su elementi društvene mreže kojima se koristiš. Zapiši taj skup i odredi mu kardinalni broj.

Odredi podskup *V* skupa *M* čiji će elementi biti društvene mreže na kojima provedeš više od 2 sata dnevno. Prikaži skupove pomoću Vennovog dijagrama.

Je li $V = M$?

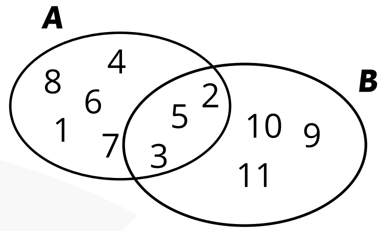
ZANIMLJIVOST! **Vennov dijagram** prvi je opisao logičar i filozof John Venn 1880. godine. Dijagram je najčešće sastavljen od krugova pomoću kojih se prikazuju skupovi, operacije i relacije na skupovima te odnosi među pojmovima. Vennov dijagram omogućuje vizualizaciju podataka i odnosa među njima te se često koristi u obrazovanju i u poslovnom svijetu.



OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

1.2. Operacije sa skupovima

PRISJETI SE!



1. Zapiši skupove A i B te odredi:

a) presjek skupova $A \cap B$.

b) uniju skupova $A \cup B$.

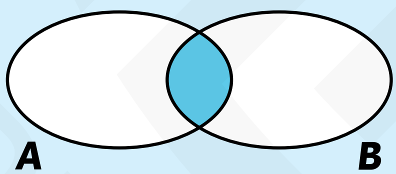
Skup V jest skup alata koje upotrebljava vodoinstalater u radu, a skup S jesu alati koje upotrebljava stolar u radu.

U presjeku $V \cap S$ nalaze se alati koje upotrebljavaju i vodoinstalater i stolar.

Uniju $V \cup S$ čine svi alati.

Razlika skupova $V \setminus S$ jesu alati koje upotrebljavaju vodoinstalateri, a ne upotrebljavaju stolari, dok razliku $S \setminus V$ čine alati koje upotrebljavaju stolari, a ne upotrebljavaju vodoinstalateri. Uočimo da ta dva skupa nisu jednaka.

UPAMTI!

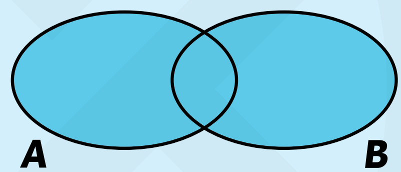


$$A \cap B$$

Presjek skupova A i B jest skup svih elemenata koji pripadaju skupu A i pripadaju skupu B.

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$

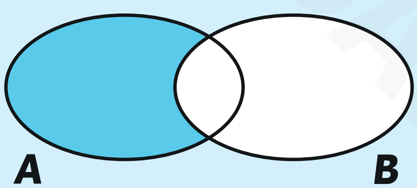
Ako je presjek prazni skup, onda su A i B **disjunktni skupovi**.



$$A \cup B$$

Unija skupova A i B jest skup svih elementa koji pripadaju skupu A ili pripadaju skupu B.

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}$



$$A \setminus B$$

Razlika skupova A i B jest skup svih elementa koji pripadaju skupu A, a ne pripadaju skupu B.

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$

PRIMJER 1.

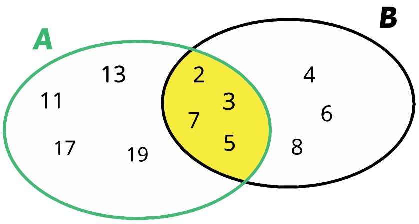
Odredimo presjek i uniju sljedećih skupova:

a) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

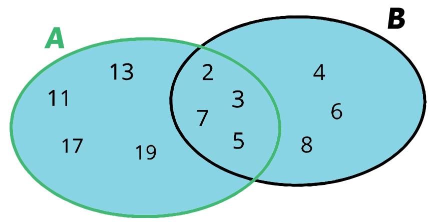
b) $C = \{11, 10, 15\}$, $D = \{12, 13, 14\}$.

✓ Rješenje:

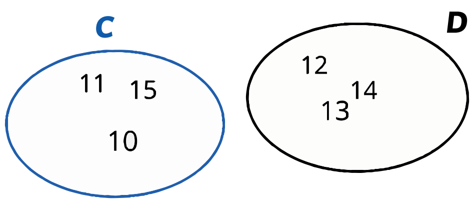
a) $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\}$



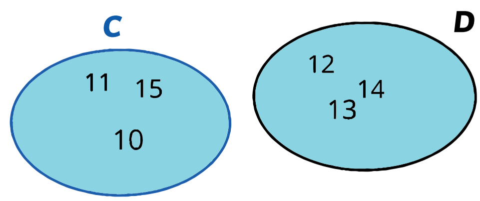
$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 17, 19\}$



b) $C \cap D = \emptyset$



$C \cup D = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$



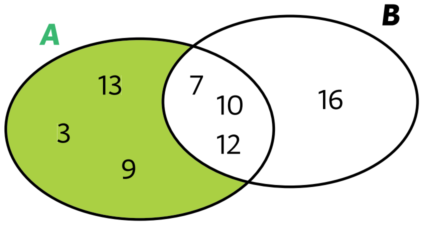
C i D su disjunktni skupovi jer im je presjek prazni skup.

PRIMJER 2.

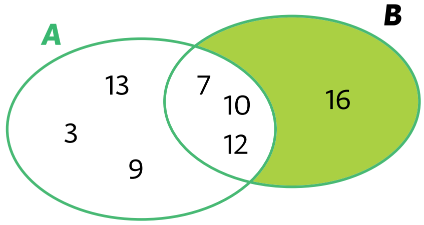
Zadani su skupovi $A = \{3, 7, 9, 10, 12, 13\}$ i $B = \{7, 10, 12, 16\}$. Odredimo $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

✓ Rješenje:

$A \setminus B = \{3, 9, 13\}$



$B \setminus A = \{16\}$



Uočimo:

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

$A \setminus B \neq B \setminus A$

ZADATAK 1. Zadani su skupovi $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, $B = \{10, 20, 30, 40\}$. Odredi $A \cap B$, $A \cup B$ i $A \setminus B$.

ZADATAK 2. Zadani su skupovi $C = \{d, a, n\}$, $D = \{n, a, p, o, r\}$. Odredi $C \cap D$, $D \cup C$ i $D \setminus C$.

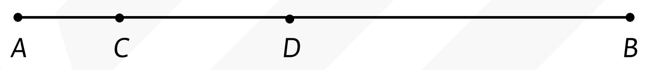
ZADATAK 3. Zadani su skupovi $E = \{m, o, j\}$, $L = \{z, n, o, j\}$ i $T = \{j, o, n\}$. Odredi:

a) $E \cap L \cap T$ **b)** $E \cup L \cup T$ **c)** $(L \cap T) \cup E$ **d)** $L \setminus T$ **e)** $T \setminus E$ **f)** $E \setminus L$.

ZADATAK 4. Zadani su skupovi $M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $N = \{1, 3, 9, 27\}$, $P = \{1, 2, 4, 8, 16\}$. Odredi:

a) $M \cap N$ **b)** $M \cap P$ **c)** $M \setminus P$ **d)** $P \setminus M$ **e)** $N \cup P$ **f)** $M \cup N \cup P$.

ZADATAK 5. Zadane su dužina $\overline{AD}$ i dužina $\overline{CB}$. Odredi presjek, uniju i razlike tih dviju dužina.



ZADATAK 6. Nacrtaj dva trokuta kojima je presjek:

a) točka **b)** dužina **c)** trokut **d)** četverokut **e)** peterokut **f)** šesterokut.

ZADATAK 7. Skup S čine slova riječi *BLATO*. Skup R čine slova riječi *OBLAK*.

a) Zapiši skupove S i R. **b)** Prikaži skupove Vennovim dijagramom. **c)** Odredi *card* $(S \cap R)$

d) Odredi *card* $(S \cup R)$ **e)** Odredi $S \setminus R$ **f)** Odredi $R \setminus S$

ZADATAK 8. Vennovim dijagramom zadani su skupovi J, K, L. Osjenčaj na dijagramu:

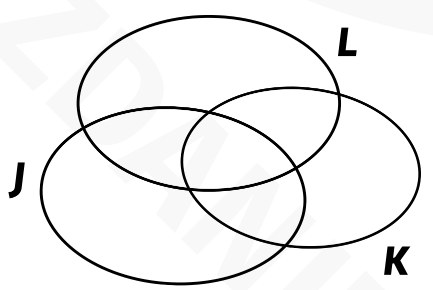
a) $(J \cup K) \cap L$

b) $(J \cap K) \cup L$

c) $(J \setminus K) \cup L$

d) $(J \cap K) \setminus L$

e) $(K \cup L) \setminus J$.

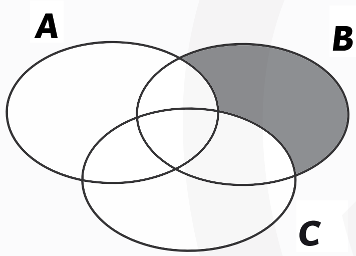


ZADATAK 9. Odredi elemente skupa A i skupa B ako je $A \cup B = \{2, 4, m, 6, 7, t\}$, $A \cap B = \{m, t\}$ i $A \setminus B = \{4, 6\}$.

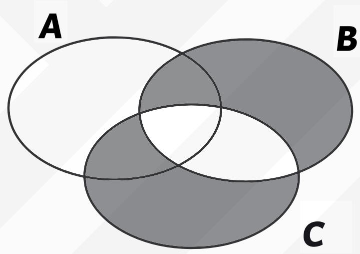
ZADATAK 10. Odredi elemente skupa S i skupa P ako vrijedi $6 \notin S \setminus P$, $4 \in S \setminus P$, $S \cup P = \{4, 6, 8, 10, 12\}$, $P \setminus S = \{8, 10, 12\}$.

ZADATAK 11. Zadani su skupovi A, B, C. Izrazi uz pomoć operacija sa skupovima osjenčani dio skupova A, B i C.

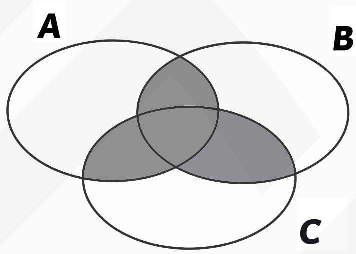
a)



b)



c)



PRIMJER 3.

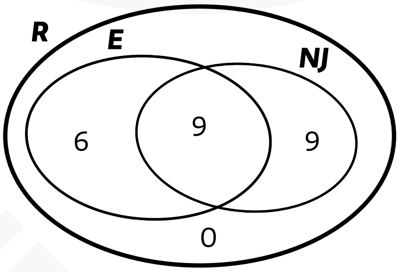
U nekom razredu 15 učenika uči engleski jezik, 18 uči njemački jezik te 9 učenika uči i engleski i njemački jezik. Ako svaki učenik tog razreda uči barem jedan strani jezik, koliko je učenika u tom razredu?

✓ Rješenje:

U ovom zadatku ne zanimaju nas elementi skupa već njihov broj pa ćemo u Vennov dijagram upisati broj elemenata s nekim svojstvom.

Označimo slovom E skup učenika koji uče engleski jezik, slovom NJ skup učenika koji uče njemački jezik. Broj učenika u presjeku jest 9. Učenika koji uče samo engleski je $15 - 9 = 6$, a učenika koji uče samo njemački je $18 - 9 = 9$. Kako svaki učenik uči bar jedan strani jezik, tako je izvan tih skupova 0 učenika.

Broj učenika u razredu: $6 + 9 + 9 = 24$.



OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

ZADATAK 12. U jednom razredu 10 učenika trenira nogomet, 8 hrvanje, 2 učenika treniraju i nogomet i hrvanje, a 4 učenika ne treniraju ni nogomet ni hrvanje. Koliko je učenika u tom razredu? Koliko učenika trenira samo nogomet?

ZADATAK 13. Među 10 prijatelja sedam svira gitaru, troje svira klavir, a dvoje ne svira te instrumente. Koliko prijatelja svira i klavir i gitaru? Prikaži rješenje Vennovim dijagramom.

ZADATAK 14. U razredu od 22 učenika, njih 11 ima aplikaciju Viber, 13 WhatsApp, a 10 učenika ima i Viber i WhatsApp. Koliko učenika ima aplikaciju WhatsApp, a nema Viber? Koliko učenika nema ni WhatsApp ni Viber?

ZADATAK 15. U kinu pod zvijezdama bilo je 60 osoba. 11 osoba jelo je samo kokice, 15 osoba pilo je samo sok, a 4 osobe nisu jele kokice ni pile sok. Koliko je osoba jelo kokice i pilo sok?

ZADATAK 16. Od 250 učenika jedne škole njih 50 ima mačku i psa, 34 samo mačku, a 61 učenik nema ni psa ni mačku. Koliko učenika ima psa?

IZAZOV!

Nađi sve skupove S za koje vrijedi $S \cup \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

ZANIMLJIVOST!

Teorija skupova grana je matematike koja proučava svojstva skupova. Utemeljitelj teorije skupova njemački je matematičar Georg Cantor u drugoj polovini 19. stoljeća. Cantorova teorija sadržava kontradikcije. Jedna je od njih Russellov paradoks koji je izmislio britanski filozof, logičar i matematičar Bertrand Russell. Tražio je odgovor na pitanje može li neki skup sadržavati samog sebe kao element ili ne može. Najpoznatija verzija paradoksa jest priča o brijaču.

Priča o brijaču

Zamislite malo selo u kojem postoji jedan brijač. Taj brijač ima pravilo: brije sve muškarce u selu koji se ne briju sami. Postavlja se ključno pitanje: Tko brije brijača?

Analiza paradoksa:

Ako brijač brije sam sebe, prema svom pravilu, ne bi trebao brijati sebe.

S druge strane, ako brijač ne brije sebe, prema pravilu on bi trebao brijati sebe.

Vidimo da je zadana situacija nemoguća, primjer vodi do logičke kontradikcije.

1.3. Prirodni i cijeli brojevi

PRISJETI SE!

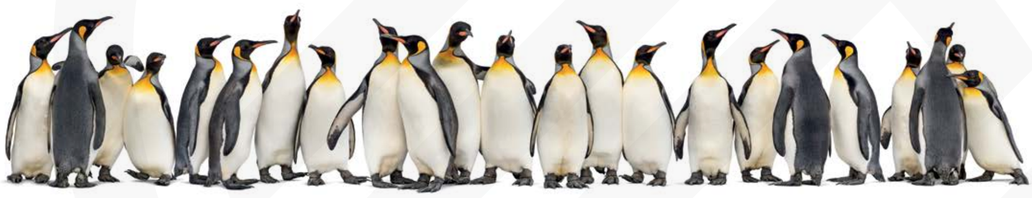
1. Napiši pet dvoznamenkastih višekratnika broja 4. Jesu li tvoja rješenja parni brojevi?

2. Koji su od brojeva djeljivi s 5? Po čemu to zaključuješ?

3. Koji su brojevi neposredni prethodnik i neposredni sljedbenik broja –1?

4. Koji je od umnožaka rastav broja 66 na proste faktore?

a) $2 \cdot 33$ **b)** $6 \cdot 11$ **c)** $22 \cdot 3$ **d)** $2 \cdot 3 \cdot 11$



Na antarktičkom ledu, gdje temperature mogu pasti i do −60°C, žive carski pingvini.

Koliko je pingvina na fotografiji?

Brojeve koji služe za prebrojavanje zovemo **prirodni brojevi**.

UPAMTI! Skup prirodnih brojeva označavamo $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Najmanji prirodni broj jest 1. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo. Nula nije prirodni broj.

Skup prirodnih brojeva i broj 0 čine skup $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

PRIMJER 1.

Rastavimo broj 36 na proste faktore.

✔ Rješenje:

Prisjetimo se da su **prosti brojevi** prirodni brojevi veći od 1 koji su djeljivi samo s 1 i samim sobom. Svi ostali prirodni brojevi veći od 1 jesu **složeni brojevi**. Primijetimo da broj 1 nije ni prosti ni složeni broj. Primijetimo i da je 2 jedini prosti parni broj.
Prosti su brojevi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

Rastavimo 36 na umnožak dvaju brojeva i ponavljamo taj postupak dok ne dođemo do umnoška prostih brojeva.

36
4 · 9
2 · **2** **3** · **3**

ili

36
2 · 18
2 · 9
3 · **3**

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$

Iz rastava na proste brojeve možemo odrediti sve djelitelje broja 36.
To su 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

ZADATAK 1. Rastavi broj na proste faktore i odredi sve njegove djelitelje.

a) 10 **b)** 12 **c)** 18 **d)** 30 **e)** 49 **f)** 100

Najveći zajednički djelitelj zadanih prirodnih brojeva najveći je broj kojim su djeljivi svi ti brojevi.

Najmanji zajednički višekratnik zadanih prirodnih brojeva najmanji je broj koji je djeljiv svim tim brojevima.

PRIMJER 2.
Odredimo najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva:

a) 18, 24 **b)** 20, 21.

✔ Rješenje:

a) Rastavimo brojeve 18 i 24 na proste faktore.

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$D\,(18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$, $V\,(18, 24) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 72$

b) Rastavimo brojeve 20 i 21 na proste faktore.

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$21 = 3 \cdot 7$

$D\,(20, 21) = 1$, $V\,(20, 21) = 20 \cdot 21 = 420$

Primijetimo da brojevi 20 i 21 nemaju drugog zajedničkog djelitelja osim broja 1.

Za prirodne brojeve koji nemaju drugog zajedničkog djelitelja osim broja 1 kažemo da su **relativno prosti brojevi**.

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

ZADATAK 2. Odredi najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva:

a) 6, 8 **b)** 8, 10 **c)** 15, 20 **d)** 24, 36 **e)** 12, 15 **f)** 25, 50.

ZADATAK 3. Odredi najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva:

a) 70, 385 **b)** 105, 126 **c)** 63, 99 **d)** 77, 143 **e)** 84, 120 **f)** 75, 125.

ZADATAK 4. Odredi najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva 14, 22 i 30.

ZADATAK 5. Sara i Ivana voze bicikl po kružnoj stazi. Sari treba 5 minuta da prijeđe jedan krug, a Ivani 7 minuta. Ako su krenule istodobno, kada će se ponovo sresti na mjestu s kojeg su krenule?

ZADATAK 6. Razredni odjel 1.a ima 24 učenika, a 1.b ima 18 učenika. Koji je najveći broj ekipa u koje se mogu podijeliti svi učenici tih odjela tako da je u svakoj ekipi jednak broj učenika iz 1.a i učenika iz 1.b?

ZADATAK 7. Za vjenčanje je potrebno složiti jednake bukete cvijeća u vaze. Treba složiti 60 crvenih i 40 bijelih ruža u vaze s istim brojem cvjetova pojedine boje. Na koliko se načina to može učiniti? Koji je najveći broj vaza koje se mogu složiti i koliko će u njima biti bijelih, a koliko crvenih ruža?

ZADATAK 8. Odredi najmanji prirodni broj koji je djeljiv s 27 i sa 72.

PRIMJER 3.

a) Je li broj 2 795 481 djeljiv s 9?

b) Odredimo zadnju znamenku u umnošku svih višekratnika broja 4 manjih od 104.

✓ Rješenje:

Prisjetimo se pravila djeljivosti:

Prirodni broj djeljiv je brojem 2 ako je paran.

Prirodni broj djeljiv je brojem 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 3.

Prirodni broj djeljiv je brojem 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv brojem 4.

Prirodni broj djeljiv je brojem 5 ako mu je zadnja znamenka broj 0 ili broj 5.

Prirodni broj djeljiv je brojem 6 ako je djeljiv i brojem 2 i brojem 3.

Prirodni broj djeljiv je brojem 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv brojem 8.

Prirodni broj djeljiv je brojem 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 9.

Prirodni broj djeljiv je brojem 10 ako mu je zadnja znamenka broj 0.

a) Zbrojimo znamenke $2 + 7 + 9 + 5 + 4 + 8 + 1 = 36$, što je djeljivo s 9 pa zaključujemo da je zadani broj 2 795 481 djeljiv brojem 9.

b) Zapišimo umnožak $4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 100$. Umnožak završava faktorom 100, što znači da je umnožak djeljiv s 10 pa, primjenjujući pravila djeljivosti, zaključujemo da će zadnja znamenka biti 0.

ZADATAK 9. Kojim je prirodnim brojevima manjim od 10 djeljiv broj:

a) 2160 **b)** 1287 **c)** 15 912?

ZADATAK 10. Odredi zadnju znamenku u umnošku $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 101$.

ZADATAK 11. Napiši neki parni četveroznamenkasti broj kojem su sve znamenke različite, a djeljiv je s 9 i s 5.

PRIMJER 4.

a) Zbrojimo prvih 15 prirodnih brojeva.

b) Zbrojimo prvih n prirodnih brojeva.

c) Zbrojimo prirodne brojeve od 125 do 610.

d) Koliko prvih prirodnih brojeva moramo zbrojiti da dobijemo zbroj 45?

✔ Rješenje:

a) Za rješavanje zadatka koristit ćemo se Gaussovom dosjetkom. Zbroj ćemo raspisati dva puta, jednom od 1 do 15, a onda od 15 do 1 te zbrojiti:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$
$$S = 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$
$$2S = 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16$$
$$2S = 15 \cdot 16$$
$$S = \frac{15 \cdot 16}{2}$$
$$S = 15 \cdot 8$$
$$S = 120.$$

b) $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1$$
$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$
$$2S = n(n+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

c) Uočimo da zbrajamo prvi i zadnji broj te taj broj množimo polovinom ukupnog broja pribrojnika. Primijenimo: $125 + 610 = 735$, broj pribrojnika jest $610 - 125 + 1 = 486$.

Zbroj je $\frac{486 \cdot 735}{2} = 178\,605$.

d) Iz $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 45$ slijedi da je $n \cdot (n+1) = 90$. S obzirom na to da umnožak dvaju susjednih prirodnih brojeva mora biti 90, sasvim je jasno da su to brojevi 9 i 10 pa je zbroj prvih 9 prirodnih brojeva 45.

ZADATAK 12. Odredi zbroj prvih n prirodnih brojeva ako je n:

a) 10 **b)** 36 **c)** 63 **d)** 100 **e)** 121 **f)** 320.

ZADATAK 13. Zbroji prirodne brojeve:

a) od 17 do 71 **b)** od 31 do 78 **c)** od 55 do 145 **d)** od 100 do 500.

ZADATAK 14. Zbroji prvih 20: **a)** parnih brojeva **b)** neparnih brojeva.

(Uputa: parne brojeve zapisujemo kao $2n$, a neparne kao $2n + 1$.)

ZADATAK 15. Dokaži da je zbroj bilo koja dva uzastopna neparna broja uvijek višekratnik broja 4.

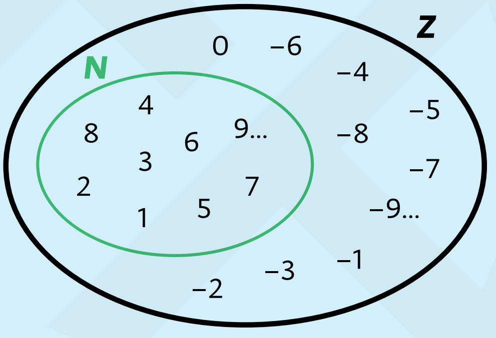
ZADATAK 16. Koliko prvih prirodnih brojeva moramo zbrojiti da dobijemo zbroj:

a) 171 **b)** 210 **c)** 1035?

Proširivanjem skupa prirodnih brojeva nulom i negativnim brojevima dobili smo **skup cijelih brojeva**.

UPAMTI! Skup cijelih brojeva označavamo $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$



ZADATAK 17. Odredi istinitost sljedećih tvrdnji.

a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ **b)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ **c)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ **d)** $-14 \in \mathbb{N}$ **e)** $27 \in \mathbb{Z}$ **f)** $\{-6, 0, 9\} \subseteq \mathbb{N}$

PRIMJER 5.

Usporedimo cijele brojeve.

a) -8 i 6 **b)** -9 i -20

✔ Rješenje:

a) $-8 < 6$ jer svaki je negativni cijeli broj uvijek manji od svakog pozitivnog cijelog broja

b) $-9 > -20$ jer od dvaju negativnih cijelih brojeva veći je onaj koji je bliže nuli.

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

ZADATAK 18. Poredaj od najmanjeg broja do najvećega:

a) $-3, -15, 1, 19, -33, 60$ **b)** $-31, 15, 0, 192, -333, -65$ **c)** $5, -25, 30, 0, 45, -35, -70$.

ZADATAK 19. Usporedi cijele brojeve.

a) a i b ako je $a < 0$, $b > 0$ **b)** $-a$ i $-b$ ako je $a < 0$, $b > 0$ **c)** $-a$ i $-b$ ako je $a > b$

ZADATAK 20. Je li cijeli broj pozitivan ili negativan?

a) $c - d$ ako je $c > d$ **b)** $d - c$ ako je $c > d$ **c)** $c - d$ ako je $c < d$ **d)** $d - c$ ako je $c < d$

ZADATAK 21. Odredi pet uzastopnih cijelih brojeva čiji je zbroj -5.

ZADATAK 22. Odredi četiri uzastopna cijela broja čiji je zbroj -122.

ZADATAK 23. Ljerka ima saldo od −145 € na tekućem računu. Kupila je mobitel za 173 €. Hoće li ona prekoračiti dopušteni minus odobren na iznos od −320 €? Koliki će saldo biti na njezinom tekućem računu kad joj stigne uplata plaće u iznosu od 1047 €?

ZADATAK 24. Tvrtka Pekara d. o. o. ostvarila je u 2020. godini dobit od 54 125 €, u 2021. godini gubitak od 40 625 €, u 2022. godini dobit od 78 005 €, a u 2023. godini gubitak od 106 566 €. Tijekom tih četiriju godina vlasnica nije isplaćivala dobit niti je pokrivala gubitak uplatama. Vlasnica je u 2024. godini odlučila pokriti gubitak uplatom ili isplatiti dobit. Što će vlasnica učiniti i u kojem iznosu?

IZAZOV!

Odredi brojeve a i b ako je D $(a, b) = 5$ i V $(a, b) = 455$.

ZANIMLJIVOST!

Carski pingvini žive na ledenjacima koji okružuju Antarktiku. Procjenjuje se da tamo ima oko 200 000 parova. Najveća su vrsta među pingvinima. Visoki su cm i imaju masu od do kg. Žive dvadesetak godina. Hrane se račićima, lignjama i ribama. Ženka leže 1 jaje na kojem 9 tjedana sjedi mužjak. Tijekom grijanja jaja mužjak ništa ne jede pa izgubi pola svoje tjelesne mase. Ženka i mužjak zajedno se brinu o potomstvu. Sedam tjedana nakon što se izlegu, mladi pingvini počinju se samostalno kretati. Sa 6 mjeseci odlaze na otvoreno more. Carski pingvini imaju kratka krila (ne mogu letjeti) koja im služe kao peraje u vodi uz pomoć kojih mogu roniti do 280 m dubine. Mogu plivati 10 do 15 km/h. Tijekom zime prehodaju 50 do 120 km u kolonijama koje mogu uključivati do 1000 pingvina.

1.4. Racionalni brojevi

PRISJETI SE!

1. Razlomak $\frac{3}{4}$ proširi brojem 6, a razlomak $\frac{14}{49}$ skrati brojem 7.

2. Štefica je kupila 2.17 kg jabuka i 2.2 kg krušaka. Kojeg je voća više kupila?

3. Svedi na zajednički nazivnik $\frac{4}{7}$ i $\frac{5}{8}$ pa usporedi razlomke.

4. Decimalni broj 0.17 zapiši u obliku razlomka i postotka.

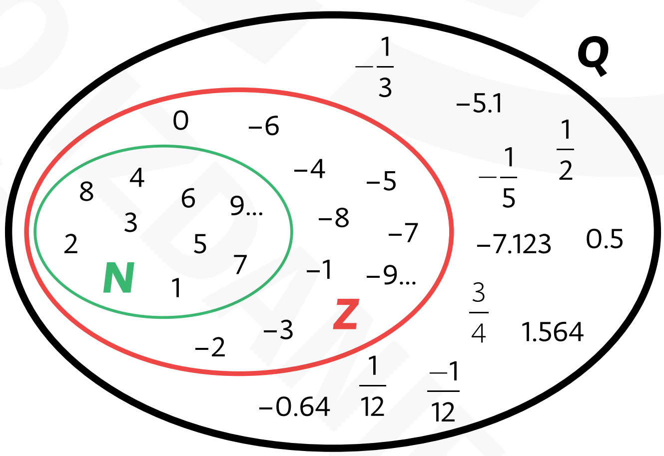
Na slici vidimo dijelove jabuke. Možemo li te dijelove izraziti prirodnim ili cijelim brojem? Ne možemo.

Broj kojim izražavamo dio neke cjeline ili odnos između dvije veličine zovemo razlomak, a sve brojeve koji se mogu napisati u obliku razlomka nazivamo **racionalni brojevi**.

UPAMTI! **Skup racionalnih brojeva označavamo $\mathbb{Q}$.**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Skup racionalnih brojeva jest **gust**, što znači da između svakih dvaju racionalnih brojeva postoji bar još jedan racionalni broj.



Racionalne brojeve možemo osim u obliku razlomka zapisati i u decimalnom zapisu. Decimalni zapis racionalnog broja dobit ćemo dijeljenjem brojnika nazivnikom.

PRIMJER 1.

Zapišimo racionalni broj u decimalnom zapisu i odredimo koja se znamenka nalazi na 20. decimali.

a) $\frac{81}{50}$ **b)** $\frac{62}{9}$ **c)** $\frac{6}{37}$ **d)** $\frac{17}{12}$

✔ Rješenje:

a) $\frac{81}{50} = 81 : 50 = 1.62$. Količnik je racionalni broj kojemu je decimalni zapis **konačan**. Nakon posljednje decimale količnika u decimalnom zapisu možemo po potrebi dopisati nule. Stoga će se na na 20. decimali nalaziti broj 0.

Decimalni zapis racionalnog broja je konačan ako rastav nazivnika na proste faktore sadrži samo brojeve 2 i 5.

b) $\frac{62}{9} = 62 : 9 = 6.\dot{8}$. Količnik je racionalni broj kojemu je decimalni zapis **čisto periodičan** s periodom 8.

Na 20. decimali nalazi se broj 8. Ako nazivnik do kraja skraćenog razlomka u rastavu na proste brojeve ne sadrži ni faktor 2 ni faktor 5, taj razlomak ima beskonačni periodički decimalni zapis.

c) $\frac{6}{37} = 6 : 37 = 0.\dot{1}6\dot{2}$. Količnik je racionalni broj kojemu je decimalni zapis **čisto periodičan** s periodom 162. Period ima tri znamenke pa ćemo 20 podijeliti s 3 i dobiti 6 s ostatkom 2. Dakle na 20. decimali nalazi se druga znamenka perioda, a to je broj 6.

Decimalni zapis racionalnog broja je čisto periodičan ako rastav nazivnika na proste faktore ne sadrži ni broj 2 ni broj 5.

d) $\frac{17}{12} = 17 : 12 = 1.41\dot{6}$. Količnik je racionalni broj kojemu je decimalni zapis **mješovito periodičan** s periodom 6 i pretperiodom 41. Na 20. decimali nalazi se broj 6.

Decimalni zapis racionalnog broja je mješovito periodičan ako rastav nazivnika na proste faktore uz brojeve 2 i 5 sadrži i neki drugi prosti faktor.

Svaki racionalni broj ima konačni decimalni zapis ili periodični decimalni zapis (čisto ili mješovito periodični).

ZADATAK 1. Zapiši racionalni broj u decimalnom zapisu i odredi koja se znamenka nalazi na 148. decimali.

a) $\frac{161}{8}$ **b)** $\frac{5}{11}$ **c)** $\frac{334}{303}$ **d)** $\frac{20}{21}$ **e)** $\frac{715}{150}$ **f)** $\frac{194}{44}$

Prisjetimo se da je znak % zapravo razlomak $\frac{1}{100}$ pa je p % racionalni broj $p \cdot \frac{1}{100}$.

PRIMJER 2.

Zapišimo decimalni broj u obliku postotka, razlomka i omjera.

a) 0.7 **b)** 0.04 **c)** 0.35

✔ Rješenje:

a) $0.70 = 70\ \% = \dfrac{70:10}{100:10} = \dfrac{7}{10} = 7:10$ **b)** $0.04 = 4\ \% = \dfrac{4:4}{100:4} = \dfrac{1}{25} = 1:25$

c) $0.35 = 35\ \% = \dfrac{35:5}{100:5} = \dfrac{7}{20} = 7:20$

ZADATAK 2. Popuni tablicu.

Razlomak				$\frac{11}{100}$				$\frac{5}{8}$
Decimalni broj	0.9				0.01			
Postotak		3 %				24 %		
Omjer			2 : 5				8 : 25	

PRIMJER 3.

Zapišimo broj u obliku razlomka.

a) $0.\dot{2}$ **b)** $-2.\dot{3}$ **c)** $0.\dot{2}\dot{6}$

✔ Rješenje:

a) Neka je $x = 0.\dot{2} = 0.2222...$, vrijedi da je

$10x = 2.2222...$

$10x = 2 + 0.2222...$

$10x = 2 + x$ pa slijedi da je $x = \dfrac{2}{9}$

b) Slijedom primjera a) $0.\dot{3} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ pa je

$-2.\dot{3} = -2 - 0.\dot{3} = -2 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{7}{3}$

c) Neka je $x = 0.\dot{2}\dot{6} = 0.2626...$ vrijedi da je

$100x = 26 + 0.2626...$

$100x = 26 + x$ pa slijedi da je $x = \dfrac{26}{99}$

OGLEDNO IZDANJE

ZADATAK 3. Zapiši broj u obliku razlomka.

a) $-0.\dot{4}$ **b)** $5.\dot{7}$ **c)** $-0.\dot{1}\dot{4}$ **d)** $0.\dot{1}5\dot{4}$ **e)** $0.\dot{8}$

PRIMJER 4.

Svedimo na isti zapis pa usporedimo dva racionalna broja.

a) 2.5 i 2.154 **b)** $-\frac{11}{15}$ i $-\frac{7}{10}$ **c)** 36 % i 0.37 **d)** $\frac{-16}{3}$ i -5.34

✔ Rješenje:

a) 2.5 > 2.154, drugi je način da dopišemo nule 2.500 > 2.154

b) Svođenjem razlomaka na zajednički nazivnik 30 slijedi $-\frac{11\cdot 2}{15\cdot 2}$ i $-\frac{7\cdot 3}{10\cdot 3}$ pa dobivamo $-\frac{22}{30} < -\frac{21}{30}$.

c) Zapisat ćemo oba broja u obliku postotka i dobiti 36 % < 37 %.

d) Zapisat ćemo brojeve u decimalnom zapisu pa imamo $-5.\dot{3} > -5.34$.

Svaki od ovih zadataka mogli smo riješiti i na drugi način, ovisno o tome koji smo zapis odabrali za zapis brojeva.

ZADATAK 4. Svedi na isti zapis pa usporedi dva racionalna broja.

a) -0.387 i -0.4 **b)** $-\frac{6}{11}$ i $\frac{5}{9}$ **c)** 7 % i $\frac{1}{14}$ **d)** $\frac{-27}{4}$ i $-6.7\dot{6}$ **e)** $4\frac{3}{5}$ i $\frac{29}{7}$

ZADATAK 5. Svedi na isti zapis pa poredaj od najmanjeg broja do najvećega: $-0{,}432$, $-\frac{53}{125}$, $\frac{2}{5}$, 43 %, $\frac{7}{15}$, $0.4\dot{1}$

ZADATAK 6. Poredaj od najvećeg broja do najmanjega: $-\frac{1}{2}$, -0.25, $-\frac{7}{4}$, -1.5, $-2\frac{3}{4}$.

ZADATAK 7. Zapiši nekoliko racionalnih brojeva koji se nalaze između:

a) 2 i 3 **b)** -3 i -2 **c)** $-\frac{6}{13}$ i $-\frac{3}{8}$ **d)** $\frac{1}{11}$ i $\frac{2}{11}$ **e)** -1 i 0 **f)** $-\frac{3}{17}$ i $-\frac{2}{17}$

PRIMJER 5.

Izračunajmo.

a) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$ **b)** $-2+2\frac{3}{5}$ **c)** $-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)$ **d)** $-\frac{2}{5}:\frac{11}{7}$

✔ Rješenje:

Prisjetimo se pravila za zbrajanje, množenje i dijeljenje razlomaka.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$,

a) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=-\frac{1\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{-4+15}{20}=\frac{11}{20}$

b) $-2+2\frac{3}{5}=-\frac{10}{5}+\frac{2\cdot 5+3}{5}=-\frac{10}{5}+\frac{13}{5}=\frac{3}{5}$

c) $-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{4\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$

d) $-\frac{2}{5}:\frac{11}{7}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{11}=-\frac{14}{55}$

ZADATAK 8. Izračunaj.

a) $-\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)$ **b)** $-\frac{2}{3}:\frac{10}{7}$ **c)** $2.3\cdot(-0.4)+8.45$ **d)** $-\frac{1}{6}+\frac{3}{7}$ **e)** $-1+2\frac{2}{3}$

ZADATAK 9. Izračunaj.

a) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{15}{7}-1$ **b)** $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right):\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}+1\right)$ **c)** $3.5+6.5\cdot(7.6+2.4)$

ZADATAK 10. Izračunaj.

a) $3.75-\left(1\frac{9}{10}-\frac{2}{5}\right)-1.45\cdot 2$ **b)** $-0.4\cdot\left(-2.2:0.2+\frac{1}{2}\right)-\left(-3+\frac{1}{4}\right)$

c) $\frac{3}{5}\left[\left(\frac{3}{7}-\frac{4}{21}\right):\left(\frac{1}{14}+\frac{5}{7}\right)\right]$ **d)** $\frac{5-\left(2-\frac{3}{4}\right)}{2\frac{5}{8}+2}\left(8-\frac{3}{5}\right)$

ZADATAK 11. U Šibeniku je polovinom prosinca temperatura zraka bila 10.6 °C. U isto je vrijeme u Virovitici iznosila −1.4 °C. Kolika je razlika u temperaturi u tim dvama gradovima?

ZADATAK 12. Za izradu jedne suknje krojač potroši $1\frac{1}{5}$ metara tkanine. Koliko takvih suknji može izraditi od 6.2 m? Metar tkanine platio je 14.90 €, a suknju je prodao za 26.90 €. Koliko je ukupna krojačeva zarada ako je prodao sve suknje?

ZADATAK 13. Marko je krenuo na put dug 147.5 km. U prvom je satu prešao $\frac{2}{5}$ duljine cijelog puta. Koliko mu je kilometara preostalo do cilja? Koliko će vremena Marko provesti na putu ako putuje uvijek istom brzinom?

ZADATAK 14. Ulaznica za kazalište stoji 5.50 €. Kazalište ima 25 redova s 30 sjedala. Na kazališnoj predstavi šestina dvorane ostala je prazna. Koliki je prihod od prodaje ulaznica s te predstave? Vlasnik dvorane petinu naplaćenog prihoda daje za porez. Koliko mu novca ostane nakon uplate poreza?

ZADATAK 15. U nekoj šumi ima 198 stabala. Prvi je dan posječeno $\frac{1}{9}$ šume, a drugi dan $\frac{1}{11}$ ostatka šume. Koliko je ostalo stabala u šumi? Koji je postotak šume posječen?

ZADATAK 16. Trgovac prodaje 340 kg jabuka. Jabuka do trenutka prodaje izgubi 1.5 % svoje mase. Nabavna je cijena 0.65 €/kg, a prodajna 1.99 €/kg. Koliko će trgovac zaraditi prodajom?

ZADATAK 17. Odredi istinitost sljedećih tvrdnji.

a) $-5(6-4\cdot 2)-(5+5\cdot 5)\cdot(-2)\in\mathbb{N}$

b) $(15\cdot 2+4\cdot 3):(4-3\cdot 6)\in\mathbb{Z}$

c) $[4.5-2.5\cdot(-3)-2]\cdot(-6.4)\in\mathbb{N}$

d) $-3\cdot(-50)\cdot(-6)\cdot 0\cdot(-14)\in\mathbb{N}$

ZADATAK 18. Odredi istinitost sljedećih tvrdnji.

a) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}$ **b)** $\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{N}$ **c)** $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$ **d)** $\left\{6, 0, \frac{9}{3}\right\}\subseteq\mathbb{N}$ **e)** $\left\{-2.0, \frac{-8}{2}, 1\right\}\subseteq\mathbb{Z}$ **f)** $\frac{16}{3}\in\mathbb{Q}$

ZADATAK 19. Zaokruži točne tvrdnje.

a) $-6\in\mathbb{N}$ **b)** $-7\in\mathbb{Q}$ **c)** $5\in\mathbb{N}$ **d)** $-10.\dot{3}\in\mathbb{Z}$ **e)** $10.\dot{2}0\dot{5}\in\mathbb{Q}$ **f)** $\frac{16}{3}\in\mathbb{Q}$

ZADATAK 20. Odredi razlomak jednak razlomku $\frac{5}{7}$ kojem je zbroj brojnika i nazivnika jednak 204.

ZADATAK 21. Odredi razlomak jednak razlomku $\frac{3}{4}$ kojem je umnožak brojnika i nazivnika jednak 432.

IZAZOV!

Usporedi razlomke bez upotrebe džepnog računala.

$\frac{304\ 301}{304\ 302}$ i $\frac{304\ 300}{304\ 301}$

ZANIMLJIVOST!

Razvoj decimalnog zapisa

Egipćani, kao ni Babilonci, nisu imali sustav za zapisivanje decimalnih brojeva već su upotrebljavali razlomke. Njemački matematičar Christoph Rudolff (1530.) koristio je decimalne brojeve. Njegov zapis imao je okomitu crtu za razdvajanje dekadskog dijela od decimalnoga. Nizozemski matematičar Simon Stevin (1585.) koristio je zaokružene brojeve iznad znamenki za oznaku decimalnih mjesta. Škotski matematičar John Napier (1614.) koristio je decimalnu točku za odvajanje dekadskog dijela od decimalnoga.

1.5. Realni brojevi

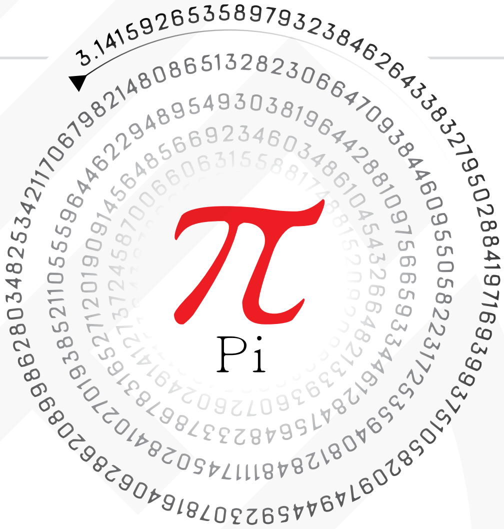
PRISJETI SE!

1. Izračunaj.

a) $\sqrt{64}$ **b)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\sqrt{2}\left(3-\sqrt{8}\right)$ **e)** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

2. Zaokruži na drugu decimalu.

a) 57.1284 **b)** 0.074 **c)** $4.5\dot{6}$



Matematička konstanta π ima beskonačni neperiodični decimalni zapis. Broj π omjer je opsega i promjera kružnice. Brojeve s beskonačnim neperiodičnim decimalnim zapisom nije moguće zapisati u obliku razlomka, dakle oni nisu racionalni. Brojeve koji se ne mogu napisati u obliku razlomka nazivamo **iracionalnim brojevima**.

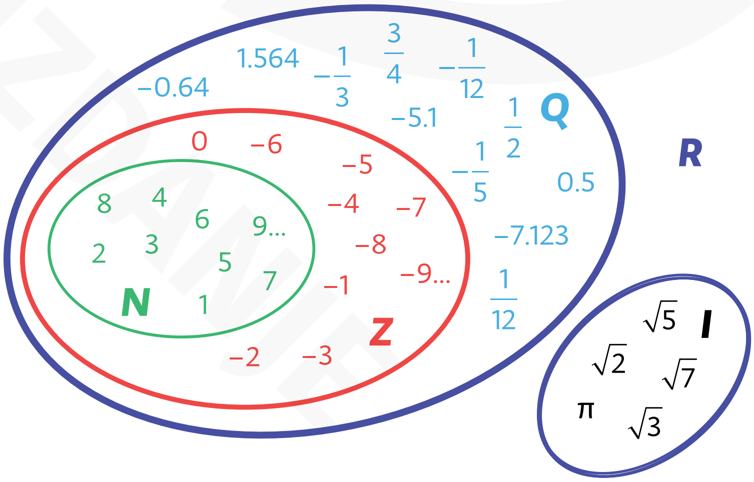
UPAMTI! **Iracionalni brojevi su brojevi koji nisu racionalni.**

Skup iracionalnih brojeva označavamo $\mathbb{I}$.

Skup racionalnih i skup iracionalnih brojeva zajedno čine skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Vrijedi $\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}=\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\varnothing$.

π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ... su iracionalni brojeva.



PRIMJER 1.

Jesu li sljedeći brojevi iracionalni?

a) $2\pi - 5$ **b)** $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+6\right)$ **c)** $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)$ **d)** $\frac{2\sqrt{9}}{15}$

✔ Rješenje:

a) da, $2\pi - 5$ je iracionalni broj jer je π iracionalni broj

b) da, $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+6\right) = 2 + 6\sqrt{2}$ je iracionalni broj jer je $\sqrt{2}$ iracionalni broj

c) ne, $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 = -2$ je cijeli broj

d) ne, $\frac{2\sqrt{9}}{15} = \frac{2\cdot 3}{15} = \frac{2}{5}$ je racionalni broj

---

ZADATAK 1. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $10.2 \in \mathbb{Q}$ **b)** $\sqrt{16} \in \mathbb{I}$ **c)** $-5\pi \in \mathbb{R}$ **d)** $0.\dot{3} \in \mathbb{Q}$ **e)** $\sqrt{11} \in \mathbb{I}$ **f)** $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{Q}$ **g)** $\frac{7\sqrt{14}}{\sqrt{7}} \in \mathbb{I}$

ZADATAK 2. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $1.006 \in \mathbb{I}$ **b)** $\sqrt{6} \in \mathbb{I}$ **c)** $-5(\pi+2) \in \mathbb{R}$ **d)** $0.1\dot{6} \in \mathbb{Q}$ **e)** $\frac{\sqrt{25}}{5} \in \mathbb{Q}$ **f)** $\frac{\pi+3}{2} \in \mathbb{Q}$ **g)** $\frac{\sqrt{8}+2}{3} \in \mathbb{I}$

ZADATAK 3. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ **b)** $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ **c)** $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{Q}$ **d)** $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ **e)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ **f)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

ZADATAK 4. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ **b)** $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\} \subseteq \mathbb{I}$ **c)** $\left\{1, \sqrt{4}, \sqrt{36}\right\} \subseteq \mathbb{Q}$ **d)** $\{1, \pi, 2\pi, 3\pi\} \subseteq \mathbb{R}$ **e)** $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

ZADATAK 5. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\sqrt{2}\left(3-\sqrt{8}\right) \in \mathbb{I}$ **b)** $4\sqrt{5}-\left(7+4\sqrt{5}\right) \in \mathbb{I}$ **c)** $\left(6+\frac{2}{5}\cdot 10\right)^2 : \sqrt{16+9} \in \mathbb{Q}$

ZADATAK 6. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\sqrt{4}\left(3+\sqrt{49}\right) \in \mathbb{I}$ **b)** $9-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \in \mathbb{I}$ **c)** $\left(1-\frac{3}{4}\cdot 16\right)^2 : \sqrt{25+36} \in \mathbb{Q}$

ZADATAK 7. Svedi na isti zapis pa usporedi dva realna broja.

a) -0.658 i $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **c)** $30\ \%$ i $\frac{\sqrt{11}}{11}$ **d)** $\frac{-28}{9}$ i $-\pi$ **e)** $3\frac{\sqrt{7}}{4}$ i $2.\dot{3}$

ZADATAK 8. Svedi na isti zapis pa usporedi dva realna broja.

a) 1.73 i $\sqrt{3}$ **b)** -2.24 i $-\sqrt{5}$ **c)** $100\ \%$ i $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ **d)** $-\frac{\pi}{3}$ i $-\frac{3}{4}\sqrt{2}$ **e)** $2\frac{2}{5}$ i $2.\dot{4}$

ZADATAK 9. Poredaj od najmanjeg broja do najvećega: $-\frac{3\sqrt{5}}{4}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1\frac{3}{5}, -0.6\dot{7}$.

ZADATAK 10. Poredaj od najvećeg broja do najmanjega: $-\frac{\sqrt{5}}{5}, \sqrt{2}, 1.67, 1\frac{2}{3}, -0.\dot{4}$.

ZADATAK 11. Zapiši nekoliko iracionalnih brojeva koji se nalaze između brojeva 2 i 3.

ZADATAK 12. Zaokruži realni broj na drugu, a zatim na treću decimalu.

a) $\sqrt{21}$ **b)** 0.4681 **c)** $1.\dot{3}$ **d)** π **e)** $\sqrt{5}$ **f)** $145.\dot{8}$

ZADATAK 13. Zaokruži realni broj na prvu, a zatim na četvrtu decimalu.

a) $\sqrt{8}$ **b)** $0.\dot{8}$ **c)** $7.14\dot{5}$ **d)** $\pi + 1$ **e)** $\sqrt{6}$ **f)** 0.98997

ZADATAK 14. Izračunaj upotrebom džepnog računala pa zaokruži na jednu decimalu.

a) $\sqrt{5}\left(1+\sqrt{3}\right)$ **b)** $\frac{\sqrt{7}+2}{5}$ **c)** $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}-0.08}{3}+\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **f)** $\frac{7\sqrt{7}-\sqrt{2}}{4\left(\sqrt{3}-1\right)}$

ZADATAK 15. Izračunaj upotrebom džepnog računala pa zaokruži na dvije decimale.

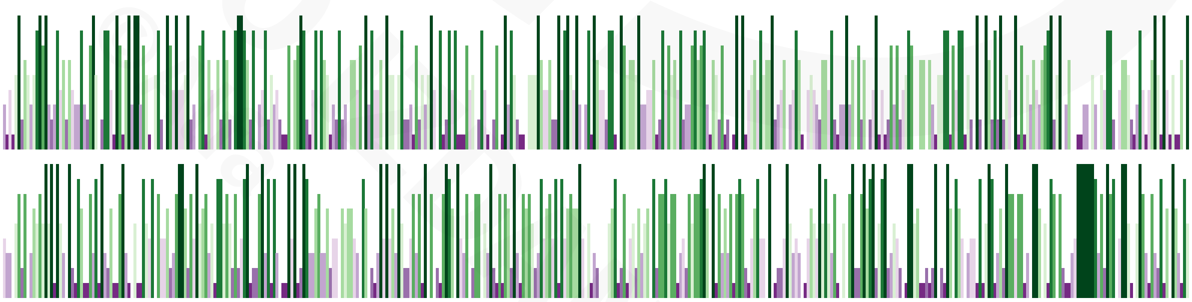
a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}+\pi}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{10}+5}{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{12}-2.5}{6}+\frac{3}{7}$ **e)** $\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$ **f)** $\frac{9\sqrt{15}-\sqrt{17}}{-3\left(\sqrt{2}+1\right)}$

IZAZOV!

Istraži pojam *transcendentni broj* te navedi primjer dvaju takvih brojeva. Je li svaki transcendentni broj iracionalan? Je li svaki iracionalni broj transcendentan?

ZANIMLJIVOST!

Slika prikazuje računalni stupčasti dijagram znamenki broja **π**.



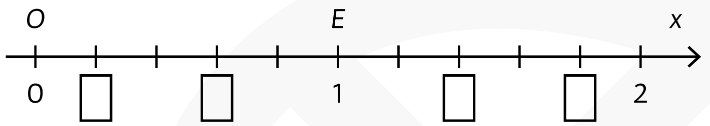
UNESCO je 2019. godine 14. ožujka proglasio **Međunarodnim danom matematike**. Taj je dan još poznat kao Dan broja pi jer je $\pi \approx 3.14$. Neki od ciljeva obilježavanja Međunarodnog dana matematike jesu podizanje svijesti o važnosti matematike kao alata za razvoj gospodarstva, u organizaciji modernog društva, u borbi protiv prirodnih katastrofa, u održivom razvoju, u razumijevanju modernih izazova i sposobnosti da odgovore na njih kao obrazovani građani.

1.6. Brojevni pravac. Apsolutna vrijednost i intervali

PRISJETI SE!

1. Na brojevnom pravcu prikaži brojeve suprotne sljedećim brojevima: -4, 2, -1.

2. Na brojevnom pravcu pridruži razlomke odgovarajućim kvadratićima.

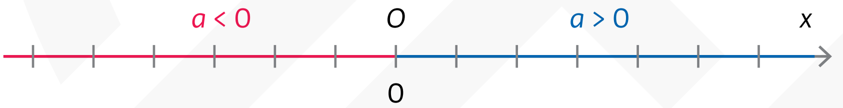


3. Odredi apsolutnu vrijednost broja $|-9|$.

4. Za koje prirodne brojeve n vrijedi $19 < n \leq 23$?

5. Za koje cijele brojeve z vrijedi $-3 < z \leq 2$? Zapiši dobivena rješenja pomoću skupovnih oznaka.

Svakoj točki na **brojevnom pravcu *x*** možemo pridružiti realni broj a. Realni broj a pozitivan je ako $a > 0$, a negativan ako je $a < 0$. Na brojevnom pravcu pozitivni realni brojevi nalaze se desno od ishodišta O koje predstavlja 0, a negativni realni brojevi lijevo.



Apsolutna vrijednost realnog broja *a* jest udaljenost broja a od nule i vrijedi $|a| \geq 0$.

UPAMTI!

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ako je } a > 0 \\ 0, \text{ ako je } a = 0 \\ -a, \text{ ako je } a < 0 \end{cases}$$

PRIMJER 1.

Odredimo.

a) $|7 - 4|$ **b)** $|-3|$ **c)** $|1+\sqrt{3}|$ **d)** $|6-\sqrt{2}|$ **e)** $|1-\sqrt{5}|$

✔ Rješenje:

a) $|7 - 4| = |3| = 3$

b) $|-3| = -(-3) = 3$ jer je -3 negativni broj, -3 udaljen je od 0 za 3

c) $|1+\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}$ jer je zbroj $1+\sqrt{3}$ pozitivni broj

d) $|6-\sqrt{2}| = 6-\sqrt{2}$ jer je razlika $6-\sqrt{2}$ pozitivni broj

e) $|1-\sqrt{5}| = -\left(1-\sqrt{5}\right) = 1+\sqrt{5}$ jer je razlika $1-\sqrt{5}$ negativni broj

---

OGLEDNO IZDANJE © Alfa

ZADATAK 1. Odredi.

a) $|\sqrt{6}|$ b) $\left|-\frac{4}{5}\right|$ c) $|2-3\sqrt{2}|$ d) $|-1-\sqrt{7}|$ e) $|3.6-\sqrt{5}|$ f) $\left|3.6-\frac{18}{5}\right|$

ZADATAK 2. Umnožak apsolutnih vrijednosti brojeva −4, 7, −5 podijeli apsolutnom vrijednošću broja −10.

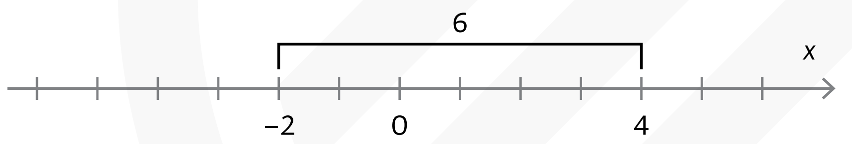
ZADATAK 3. Apsolutnu vrijednost broja −21 umanji za apsolutnu vrijednost razlike brojeva −28 i 49.

PRIMJER 2.

Odredimo udaljenost točaka kojima su pridruženi brojevi −2 i 4.

✔ Rješenje:

Pogledajmo to na brojevnom pravcu.



Udaljenost $d(-2, 4) = |-2-4| = |-6| = 6$

UPAMTI! **Udaljenost točaka na brojevnom pravcu kojima su pridruženi realni brojevi *a* i *b* jednaka je apsolutnoj vrijednosti njihove razlike.**

$$d(a, b) = |a - b|$$

ZADATAK 4. Odredi udaljenost točaka kojima su pridruženi zadani brojevi. Prikaži te točke na brojevnom pravcu.

a) −8 i 3 b) −7 i −3 c) −1.5 i −7.8 d) $-\frac{2}{7}$ i $\frac{5}{7}$ e) $\frac{11}{4}$ i 2.75 f) 1 i $\sqrt{2}$

ZADATAK 5. Odredi koordinate točaka koje su za 7 udaljene od točke s koordinatom 4.

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

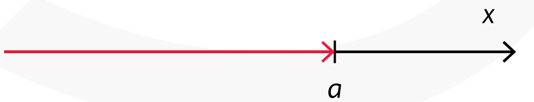
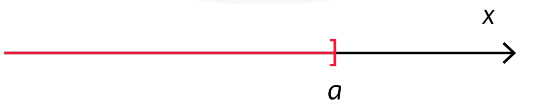
Omeđeni interval jest skup svih realnih brojeva između realnih brojeva *a* i *b*. Postoje četiri vrste omeđenih intervala:

UPAMTI!

Interval	Skupovni zapis	Brojevni pravac
$\langle a, b \rangle$ otvoreni	$\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$	
$[a, b]$ zatvoreni	$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$	
$\langle a, b]$ poluotvoreni	$\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$	
$[a, b\rangle$ poluotvoreni	$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$	

Neomeđeni interval jest skup svih realnih brojeva koji su veći od zadanog realnog broja *a* ili skup svih realnih brojeva koji su veći ili jednaki od zadanog realnog broja *a* ili skup svih realnih brojeva koji su manji od zadanog realnog broja *a* ili skup svih realnih brojeva koji su manji ili jednaki od zadanog realnog broja a.

UPAMTI!

Interval	Skupovni zapis	Brojevni pravac
$\langle -\infty, a \rangle$	$\{x \in \mathbb{R}: x < a\}$	
$\langle -\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$	
$\langle a, +\infty \rangle$	$\{x \in \mathbb{R}: x > a\}$	
$[a, +\infty\rangle$	$\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$	

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

PRIMJER 3.

Zapišimo nejednakosti uz pomoć intervala te prikažimo intervale na brojevnom pravcu.

a) $-5 < x \leq 2.5$ **b)** $x \leq -4$ **c)** $x > 1$

✓ Rješenje:

a) $\langle -5,\ 2.5]$

b) $\langle -\infty,\ -4]$

c) $\langle 1, +\infty\rangle$

ZADATAK 6. Zapiši nejednakosti uz pomoć intervala te prikaži intervale na brojevnom pravcu.

a) $-9 \leq x \leq 0.5$ **b)** $x < 8$ **c)** $x \geq -2$ **d)** $0 < x < \frac{8}{5}$ **e)** $x \leq 0$ **f)** $-1 \leq x < 0$

ZADATAK 7. Zapiši u obliku nejednakosti:

a) x je pozitivan

b) x nije pozitivan

c) x je manji od ili jednak -4

d) x je veći od ili jednak -5, a manji od 3

e) najmanja vrijednost od x jest 1

f) najveća vrijednost od x jest -1

PRIMJER 4.

Zapišimo interval uz pomoć nejednakosti.

a) $[-1.6,\ -0.1]$ **b)** $\langle -\infty,\ 10]$ **c)** $[0, +\infty\rangle$ **d)** $\langle 0,\ 1\rangle$

✓ Rješenje:

a) $-1.6 \leq x \leq -0.1$ **b)** $x \leq 10$ **c)** $x \geq 0$ **d)** $0 < x < 1$

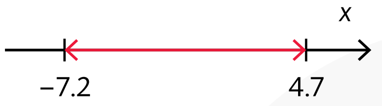
ZADATAK 8. Zapiši interval uz pomoć nejednakosti i prikaži ga na brojevnom pravcu.

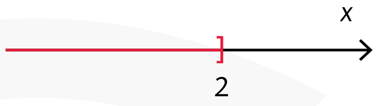
a) $\langle 2,\ 5\rangle$ **b)** $\langle -\infty, -7\rangle$ **c)** $\langle -\infty,\ -1]$ **d)** $[-2,\ 6\rangle$ **e)** $[-1,\ 1]$ **f)** $\langle 4, +\infty\rangle$

ZADATAK 9. Zapiši prikazani interval pomoću nejednakosti i pomoću intervala.

a) 

b) 

c) 

d) 

ZADATAK 10. Zadan je interval $[-3, 2\rangle$. Koji od brojeva $-3, -\sqrt{5}, \frac{3}{5}, 0, 2, \sqrt{2}, -\frac{13}{4}$ pripadaju zadanom intervalu? Koliko ima cijelih, a koliko prirodnih brojeva u intervalu?

ZADATAK 11. Koliko je cijelih brojeva u intervalu?

a) $\langle 4, 6\rangle$ **b)** $\langle -8, 5\rangle$ **c)** $\langle -1, 1]$ **d)** $[-2, 2\rangle$ **e)** $[-1, 0]$ **f)** $\langle -5, -4\rangle$

ZADATAK 12. Odredi umnožak svih cijelih brojeva koji zadovoljavaju nejednakost $-25 < x \leq 10$.

ZADATAK 13. Odredi zbroj svih cijelih brojeva koji zadovoljavaju nejednakost $-14 < x \leq 14$.

ZADATAK 14. Neka je $a \leq b$ Zapiši nejednakost koja se dobije ako obje strane nejednakosti:

a) uvećaš za 5 **b)** umanjiš za 2 **c)** pomnožiš s −1 **d)** podijeliš s 4.

ZADATAK 15. Neka je $x \geq 2$. Odaberi točne tvrdnje.

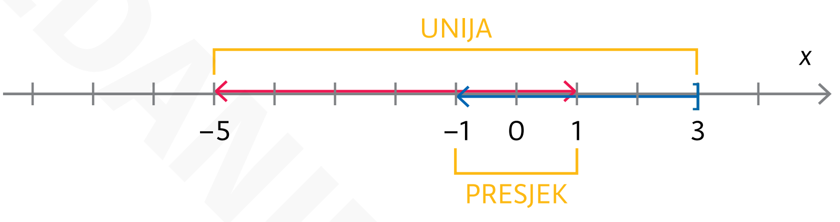
a) $x + 3 \geq 5$ **b)** $\frac{1}{6}x \geq \frac{1}{3}$ **c)** $-3x \leq -6$ **d)** $-\frac{x}{2} \geq -1$

PRIMJER 3.

Odredimo presjek i uniju intervala $\langle -5, 1\rangle$ i $\langle -1, 3]$.

✔ Rješenje:

Prikažimo intervale na brojevnom pravcu.



$\langle -5, 1\rangle \cap \langle -1, 3] = \langle -1, 1\rangle$

$\langle -5, 1\rangle \cup \langle -1, 3] = \langle -5, 3]$

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

ZADATAK 16. Odredi presjek i uniju zadanih intervala. Prikaži na brojevnom pravcu.

a) $\langle -3, -1 \rangle$ i $\langle 0, 6]$ **b)** $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle -4, 2]$ **c)** $[-2.7, -1.1 \rangle$ i $[-1.5, +\infty \rangle$ **d)** $\left[\frac{1}{5}, \frac{7}{8}\right]$ i $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

ZADATAK 17. Rokov spremnik goriva za kosilicu ima 10 litara. Navedi sve moguće količine goriva koje bi Roko mogao natočiti u spremnik goriva.

IZAZOV!

Usporedi $|a|$ i $|b|$ ako je a zbroj svih cijelih brojeva u intervalu $\langle -200, 200] \cap \langle 165, 200]$, a b zbroj svih cijelih brojeva u intervalu $\langle -200, 200] \cup \emptyset$.

ZANIMLJIVOST!

Koncept brojevnog pravca u primjeni je još od vremena starogrčkog matematičara Euklida, koji je razvio ideju geometrijskog prikaza brojeva. No moderni koncept brojevnog pravca, gdje su svi brojevi poredani linearno, uspostavljen je tek u 17. stoljeću s razvojem analitičke geometrije. Brojevni pravac ne upotrebljava se samo u matematici već i u fizici, posebno za prikaz pomaka i brzine.

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

1.7. Računske operacije u skupovima brojeva

PRISJETI SE!

1. Izračunaj napamet.

a) $9 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 20$ **b)** $17 + 748 + 183 + 52$ **c)** $6 \cdot (-5) \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 0$

2. Pojednostavni izraz $4x + 9x - 3x$.

3. Odaberi dva broja iz zadanog skupa i provjeri hoće li rezultat računskih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja biti opet element tog skupa.

a) $\mathbb{N}$ **b)** $\mathbb{Z}$ **c)** $\mathbb{Q}$ **d)** $\mathbb{I}$ **e)** $\mathbb{R}$

UPAMTI! Za sve realne brojeve vrijede svojstva:

Komutativnost zbrajanja i množenja

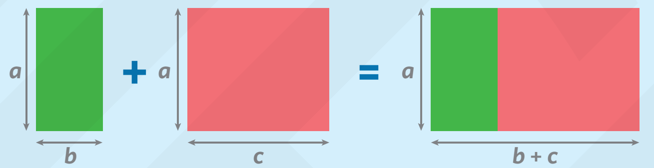
$a + b = b + a$

$a \cdot b = b \cdot a$

Asocijativnost zbrajanja i množenja

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$



$ab + ac = a(b + c)$

Distributivnost množenja prema zbrajanju $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Postojanje neutralnih elemenata za operacije zbrajanja i množenja

$a + 0 = 0 + a = a$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Svaki realni broj ima suprotni broj takav da vrijedi $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Svaki realni broj različit od 0 ima recipročni broj takav da vrijedi $a \cdot \frac{1}{a} = 1,\ a \neq 0$.

PRIMJER 1.

Odredimo recipročne brojeve sljedećih brojeva $-2, \frac{1}{5}, \frac{7}{9}, -\frac{10}{11}, 0.3, \sqrt{3}$.

✔ Rješenje:

Broj	-2	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{9}$	$-\frac{10}{11}$	0.3	$\sqrt{3}$
Recipročni broj	$-\frac{1}{2}$	5	$\frac{9}{7}$	$-\frac{11}{10}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

ZADATAK 1. Odredi recipročne brojeve sljedećih brojeva $7, \frac{1}{9}, -\frac{4}{3}, 0.75, \sqrt{5}$.

ZADATAK 2. Odredi $\frac{1}{n}$ ako je n:

a) $\frac{m+p}{m}$ **b)** $\frac{a}{b}+1$ **c)** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ **d)** $1-\frac{a}{2}$ **e)** $\frac{4}{c+2d}$ **f)** $2+\sqrt{2}$.

ZADATAK 3. Ako u strujnom krugu paralelno spojimo otpornike $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ i $R_3 = 3\,\Omega$, ukupni otpor bit će:

a) veći od 3 Ω **b)** manji od 1 Ω **c)** između 2 Ω i 3 Ω **d)** između 1 Ω i 2 Ω.

(Uputa: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$)

PRIMJER 2.

Pojednostavnimo brojevne izraze.

a) $29 \cdot 46 + 29 \cdot 54$ **b)** $4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 15\sqrt{3}$ **c)** $\frac{3}{7}a - \frac{1}{14}a$ **d)** $\sqrt{5}(x+6) - \sqrt{5}(x-9)$

e) $7(x+2) - 15(x+2)$ **f)** $\frac{1-3b}{2} - \left(\frac{5}{2} - 2b\right)$

✔ Rješenje:

a) $29 \cdot 46 + 29 \cdot 54 = 29 \cdot (46 + 54) = 29 \cdot 100 = 2900$

b) $4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = (4 + 7 - 15)\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

c) $\frac{3}{7}a - \frac{1}{14}a = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2}a - \frac{1}{14}a = \frac{6-1}{14}a = \frac{5}{14}a$

d) $\sqrt{5}(x+6) - \sqrt{5}(x-9) = \sqrt{5}[x + 6 - (x-9)] = \sqrt{5}(x + 6 - x + 9) = \sqrt{5} \cdot 15 = 15\sqrt{5}$

e) $7(x+2) - 15(x+2) = (7 - 15)(x+2) = -8(x+2)$

f) $\frac{1-3b}{a} - \left(\frac{5}{2} - 2b\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}b - \frac{5}{2} + 2b = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}b + 2b = -2 + \frac{1}{2}b$

ZADATAK 4. Pojednostavni brojevne izraze.

a) $295 \cdot 35 + 500 + 295 \cdot 65$ **b)** $24 \cdot \frac{36}{47} + \frac{36}{47} \cdot 23$ **c)** $\frac{4}{5} \cdot 64 + \frac{6}{5} \cdot 46 - \frac{64}{5} \cdot 4 + \frac{4}{5} \cdot 46$

ZADATAK 5. Pojednostavni brojevne izraze.

a) $-3.2\sqrt{5} + 6.8\sqrt{5} + 3.4\sqrt{5}$ **b)** $\frac{1}{4}\sqrt{11} - \frac{3}{4}\sqrt{11} - \left(-\frac{1}{4}\sqrt{11}\right)$ **c)** $-3\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$

ZADATAK 6. Pojednostavni brojevne izraze.

a) $\sqrt{6}(y+2)-\sqrt{6}(y+2)$ **b)** $\frac{4}{5}(x+7)-(x+7)$ **c)** $5.6(a+b)+3.4(a+b)-(a+b)$

d) $16.8(x-2)+(x-2)+3.2(x-2)$ **e)** $\frac{3-4a}{3}-\left(\frac{1}{3}a+1\right)$ **f)** $\frac{5x}{3}-\left(\frac{5x}{6}-1\right)$

ZADATAK 7. Koristeći svojstva računanja s realnim brojevima, izračunaj napamet.

a) $25 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$ **b)** $4501+3242+758+499$ **c)** $350 \cdot 72+350 \cdot 28$

d) $25 \cdot \sqrt{5} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{5} \cdot 71 \cdot 2$ **e)** $-61+593+61-93$ **f)** $281 \cdot 48-181 \cdot 48$

ZADATAK 8. Izračunaj.

a) $5-5 \cdot (8-11)$ **b)** $4+(-21):3-[5 \cdot (-2)+4 \cdot (-1)-36:(-6)]$

c) $3+4 \cdot (5+6)-1+5 \cdot 4+8$ **d)** $-1+(-2) \cdot 3-[2+8:(-2)-10 \cdot (-1)-9]$

e) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{15}{2}-5\frac{1}{2}$ **f)** $\dfrac{\left(\frac{2}{7}-2\right) \cdot 7+\left(\frac{2}{3}+2\right) \cdot 3}{\frac{1}{7}:\frac{3}{7}+\frac{2}{9} \cdot 3}$ **g)** $\frac{1}{7} \cdot \left[\left(\frac{1}{7}-1\right):\frac{2}{7}+\left(\frac{2}{5}+2\frac{1}{5}\right):\frac{2}{5}\right]$

ZADATAK 9. Od trećine zbroja brojeva 5 i −4 oduzmi petinu umnoška brojeva −4 i 5.

ZADATAK 10. Od dviju sedmina razlike brojeva −8 i −4 oduzmi količnik brojeva −12 i 4.

ZADATAK 11. Količnik brojeva 5 i 7 podijeli recipročnim brojem broja $\frac{7\sqrt{7}}{25}$.

ZADATAK 12. Izračunaj razmak između dugmadi ako je udaljenost od prvog do sedmog dugmeta na jastučnici 78 cm.

ZADATAK 13. Poprečni presjek cijevi širi se s $A_1 = 314\ \text{mm}^2$ na $A_2 = 530.66\ \text{mm}^2$. Kolika je brzina strujanja v_2 kroz prošireni presjek ako je u užem dijelu cijevi brzina $v_1 = 19.5$ m/s i znamo da vrijedi $v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$. Zaokruži rezultat na jednu decimalu.

ZADATAK 14. Ako je Pero prešao $s = 1.8$ km za $t = 20$ minuta, kojom je brzinom v hodao ako znamo da je $s = v \cdot t$? Zapiši rezultat u m/s.

ZADATAK 15. Ako vodu mase $m_1 = 10$ kg i temperature $t_1 = 18$ °C pomiješamo s vodom mase m_2 i temperature $t_2 = 65$ °C dobijemo vodu temperature $t = 40$ °C. Koliko smo kg vode m_2 pomiješali s hladnom vodom ako formula glasi $m_1 \cdot (t - t_1) = m_2 \cdot (t_2 - t)$?

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

ZADATAK 16. CNC vertikalna glodalica ima nabavnu vrijednost $NV = 155\,495$ €. Kolika je knjigovodstvena vrijednost KV glodalice nakon $n = 4$ godine ako je pretpostavljeno trajanje korištenja $t = 7$ godina.

(Uputa: $KV = NV - n \cdot \frac{NV}{t}$)

PRIMJER 3.

Ana je četiri dana bilježila koliko kilometara dnevno prijeđe biciklom. Redom je prešla 5 km, 6 km, 4 km i 5 km. Koliko je Ana u prosjeku dnevno prešla kilometara? Koliko kilometara Ana mora prijeći peti dan da joj prosjek za svih pet dana bude 6 km?

✔ Rješenje:

Izračunajmo prosječnu udaljenost za prva četiri dana. $\frac{5+6+4+5}{4} = 5$.

Ana je u prosjeku dnevno prešla 5 km.

Da bi njen prosjek u 5 dana bio 6 km dnevno, ukupan broj prijeđenih kilometara mora biti $6 \cdot 5 = 30$.

Ana je već prešla 20 km u prva 4 dana, znači peti dan mora prijeći $30 - 20 = 10$ km.

Dakle, Ana mora prijeći 10 kilometara peti dan kako bi postigla prosjek od 6 kilometara dnevno.

PRIMJER 4.

Izračunajmo prosječnu cijenu zatvarača ako je kupljeno 5 zatvarača po cijeni od 1.99 € za komad i 9 jednakih zatvarača po 1.06 € za komad.

✔ Rješenje:

Potrošili smo $5 \cdot 1.99 + 9 \cdot 1.06 = 19.49$ €. Kupili smo $5 + 9 = 14$ komada zatvarača. U prosjeku smo jedan zatvarač platili $19.49 : 14 = 1.39$ €. Ima li rezultat smisla? Ima jer je $1.06 < 1.39 < 1.99$.

UPAMTI! **Aritmetička sredina $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ realnih brojeva jest broj**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}{n}$$

ZADATAK 17. Neto mirovine Barice, Alemke, Aurore i Svetlane iznose 624 €, 666 €, 638 € i 649 €. Koliko iznosi njihova prosječna mirovina?

ZADATAK 18. Instalacijski vod PVC PP-Y (PGP) 3×2,5 mm² kupljen je od triju dobavljača. U trgovačkom društvu Kanalica d. o. o. kupljeno je 300 m po 0.88 €, u obrtu Struja 500 m po 0.82 € i u trgovačkom društvu Instalacija d. o. o. 300 m po 0.70 €. Kolika je prosječna cijena tog kabla u skladištu?

ZADATAK 19. Fran je trčao pet dana zaredom i bilježio svoje vrijeme u minutama: 72, 54, 61, 65 i 58 minuta. Šesti dan Fran želi postići takav rezultat da mu prosjek vremena trčanja svih šest dana bude točno 1 sat. Koliko minuta Fran treba trčati šesti dan?

ZADATAK 20. U razredu koji ima 21 učenika 2 su učenika prošla s odličnim uspjehom, 10 učenika s vrlo dobrim uspjehom, 6 učenika s dobrim uspjehom, a 3 učenika s dovoljnim uspjehom. Kolika je prosječna ocjena tog razreda?

PRIMJER 5.

U trgovačkom društvu ABC od 540 radnika njih 378 radi na neodređeno radno vrijeme, a ostali rade na određeno radno vrijeme. Odredimo omjer radnika zaposlenih na određeno radno vrijeme i radnika zaposlenih na neodređeno radno vrijeme. Koji postotak čine radnici zaposleni na određeno radno vrijeme?

✔ Rješenje:

U trgovačkom društvu ima $540 - 378 = 162$ radnika zaposlenih na određeno radno vrijeme.

Omjer radnika zaposlenih na određeno radno vrijeme i radnika zaposlenih na neodređeno radno vrijeme iznosi $\frac{162}{378} = \frac{3}{7}$.

Postotak radnika zaposlenih na određeno radno vrijeme jest $\frac{162}{540} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\ \%$.

PRIMJER 6.

Ante i Marko štede novac za izlet na Plitvička jezera. Ukupno su zajedno uštedjeli 120 €. Omjer iznosa koji je uštedio Ante prema iznosu koji je uštedio Marko jest 3 : 2. Koliko je novca uštedio Ante, a koliko Marko?

✔ Rješenje:

Ako je omjer Antine ušteđevine prema Markovoj , to znači da je za svaka ušteđena Antina 3 € Marko uštedio 2 €. Ukupan broj dijelova jest

Ante je uštedio $\frac{3}{5}$ ukupnog iznosa, a Marko $\frac{2}{5}$.

Ante je uštedio $\frac{3}{5} \cdot 120 = 3 \cdot \frac{120}{5} = 3 \cdot 24 = 72$ €, a Marko je uštedio $\frac{2}{5} \cdot 120 = 2 \cdot \frac{120}{5} = 2 \cdot 24 = 48$ € ili jednostavnije $120 - 72 = 48$ €.

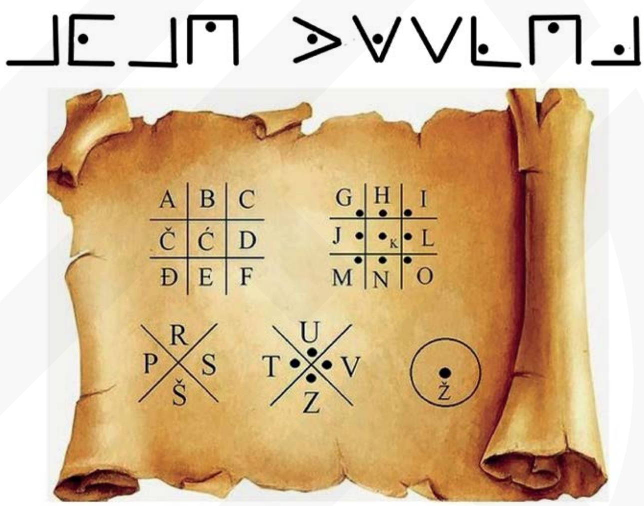
ZADATAK 21. Ivan i Tomislav zajedno su na natjecanju osvojili 300 bodova. Ivan je osvojio 60 % od ukupnih bodova. Odredi omjer njihovih bodova. Koliko Tomislavu nedostaje bodova da omjer bude 1 : 1?

ZADATAK 22. Jelica je u ajvar stavila 10 kg crvene rog-paprike i 4 kg patlidžana. U kojem se omjeru miješaju paprika i patlidžan u ajvaru? Koliki je postotak paprike u ajvaru? Koliko Jelica treba paprike i patlidžana ako želi pripremiti 3.5 kg ajvara?

ZADATAK 23. Na izlet ide 60 planinara. Omjer planinara mlađih od 40 godina i onih starijih od 40 godina jest 7 : 8. Koliko je na izletu planinara mlađih od 40 godina? Odredi njihov postotak u skupini.

IZAZOV! Dokaži da je četveroznamenkasti broj kojemu su po dvije uzastopne znamenke međusobno jednake djeljiv brojem 11.

ZANIMLJIVOST! **Aritmetika** je grana matematike koja se bavi odnosima među brojevima i osnovnim matematičkim operacijama – zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem, dijeljenjem, potenciranjem, korjenovanjem i logaritmiranjem. Carl Friedrich Gauss svojim djelom *Istraživanja u aritmetici* (1801.) nadogradio je aritmetiku i utemeljio **teoriju brojeva**. Teorija brojeva primjenjuje se u kriptografiji od sedamdesetih godina prošlog stoljeća. **Kriptografija** je znanost koja se bavi šifriranjem poruka i primjenjuje se u *blockchain* tehnologiji i u zaštiti trgovanja kriptovalutama. Najpoznatija kriptovaluta jest *bitcoin*.



Na slici je šifrirano ime i prezime britanskog matematičara. Otkrij njegovo ime i istraži njegov doprinos kriptografiji.

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

PROVJERI SVOJE ZNANJE

1. Zadan je skup $S = \{22, 24, 26, 28, 30, 32, 34\}$. Odredi kardinalni broj skupa S.

a) $card\ (S) = 7$ **b)** $card\ (S) = 22$ **c)** $card\ (S) = 34$ **d)** $card\ (S) = 1$

2. Neka je skup $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$. Koja tvrdnja nije istinita?

a) $\{5, 15, 25\} \subseteq A$ **b)** $card\ (A) = 6$ **c)** $35 \notin A$ **d)** $\{25\} \in A$

3. Zadani su skupovi $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B = \{3, 9, 15, 21, 27\}$. Koja tvrdnja nije istinita?

a) $A \cap B = \{3, 9, 15\}$ **b)** $A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 21, 27\}$ **c)** $A \setminus B = \{21, 27\}$ **d)** $B \setminus A = \{21, 27\}$

4. Rastav broja 50 na proste faktore je:

a) $2 \cdot 25$ **b)** $5 \cdot 10$ **c)** $2 \cdot 5^2$ **d)** $1 \cdot 50$

5. Koja tvrdnja nije istinita? 24 je najmanji zajednički višekratnik brojeva:

a) 8 i 3 **b)** 6 i 8 **c)** 12 i 8 **d)** 6 i 4.

6. Broj $3 : 20$ nije jednak broju:

a) 15 % **b)** 3.20 **c)** 0.15 **d)** $\frac{3}{20}$.

7. Vrijednost izraza $5 + 5 \cdot 6 + 4$ je:

a) 100 **b)** 64 **c)** 39 **d)** 55

8. Koji je od sljedećih brojeva iracionalan?

a) $7.\dot{7}$ **b)** $\sqrt{121}$ **c)** -15π **d)** $\frac{7}{9}$

9. Vrijedi $-152.691 > -152.7$.

a) točno **b)** netočno

10. Koji od ponuđenih brojeva se nalazi između brojeva $\frac{1}{8}$ i $\frac{3}{8}$.

a) 1.213 **b)** 0.452 **c)** −0.126 **d)** 0.135

11. Zaokruži realni broj $2.\dot{6}$ na dvije decimale.

a) 2.6 **b)** 2.66 **c)** 2.67 **d)** 2.7

12. Odredi apsolutnu vrijednost realnog broja $-10 - \pi$

a) $10 + \pi$ **b)** $-10 - \pi$ **c)** -10π **d)** $10 - \pi$

13. Udaljenost točaka kojima su pridruženi brojevi −18 i −5 je:

a) −23 **b)** 23 **c)** −13 **d)** 13

14. Zapiši nejednakost $-6 \leq x < -1$ uz pomoć intervala.

a) $\langle -6, -1 \rangle$ **b)** $\langle -6, -1]$ **c)** $[-6, -1\rangle$ **d)** $[-6, -1]$

15. Zapiši interval $\langle -1, 9 \rangle$ uz pomoć nejednakosti.

a) $-1 \leq x \leq 9$ **b)** $-1 < x \leq 9$ **c)** $-1 < x < 9$ **d)** $-1 \leq x < 9$

OGLEDNO IZDANJE ©ALFA

16. Koji od brojeva pripada intervalu $[-1, 0\rangle$?

a) 0 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $-\sqrt{2}$ **d)** $\frac{1}{4}$

17. Presjek intervala $[-3.3, -2.2\rangle$ i $[-2.7, +\infty\rangle$ je:

a) $[-2.7, -2.2\rangle$ **b)** $[-3.3, -2.2\rangle$ **c)** $[-3.3, -2.7]$ **d)** $\langle -2.2, -2.7]$

18. Unija intervala $[-0.4, 0.9\rangle$ i $\langle -0.6, 0.95]$ je:

a) $\langle -0.6, 0.9\rangle$ **b)** $[-0.4, 0.9\rangle$ **c)** $[-0.4, 0.95]$ **d)** $\langle -0.6, 0.95]$

19. Brojevni izraz $64 \cdot \frac{41}{50} + \frac{41}{50} \cdot 36$ jednak je:

a) 41 **b)** 82 **c)** $\frac{2648}{50}$ **d)** 100

20. Neto plaća radnika iznosila je 1580 € u listopadu, 1400 € u studenom i 1750 € u prosincu. Koliko iznosi prosječna neto plaća radnika za zadnje tromjesečje?

a) 1576.67 € **b)** 1840.67 € **c)** 1140.06 € **d)** 1400 €

Rješenja zadataka potraži u digitalnom udžbeniku.

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

1. Prikaži Vennovim dijagramom skup D djelitelja broja 12 i jedan njegov podskup P. Zapiši skupove D i P. Je li $1 \in D$?

2. Prikaži Vennovim dijagramom skup znamenki Z i njegov podskup N neparnih znamenki. Zapiši skupove Z i N.

3. Zadani su skupovi $S = \{6, 12, 15, 18, 21, 27\}$ i $V = \{6, 15, 21\}$. Je li $V \subseteq S$? Odredi kardinalni broj skupa S i V.

4. Neka je S skup svih slova u riječi POKRET, a P skup svih slova u riječi POKER. Zapiši skupove S i P. U kakvom su odnosu ta dva skupa? Zapiši odgovor matematičkim simbolom. Odredi kardinalni broj skupa $S \setminus P$.

5. Neka je skup $A = \{5, 8, 9, 11, 15, 28\}$. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\{5, 6, 8\} \subseteq A$ **b)** $card\ (A) = card\ (A \cup \emptyset)$ **c)** $5 \notin A$ **d)** $\{15\} \in A$ **e)** $9 \subseteq A$

6. Zadan je skup $S = \{0, 1, 2\}$. Ispiši sve njegove podskupove P koji imaju:

a) $card\ (P) = 1$ **b)** $card\ (P) = 2$ **c)** $card\ (P) = 0$.

7. Zadani su skupovi $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$, $B = \{1, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Odredi $A \cap B$, $A \cup B$ i $A \setminus B$.

8. Zadani su skupovi $C = \{u, n, o, s\}$, $D = \{u, s, n, i, c, e\}$. Odredi $C \cap D$, $D \cup C$ i $D \setminus C$.

9. Zadani su skupovi $M = \{2, 3, 5, 7\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P = \{1, 2, 4, 5, 7\}$. Odredi:

a) $M \cap N$ **b)** $M \cap P$ **c)** $M \setminus N$ **d)** $P \setminus M$ **e)** $N \cup P$ **f)** $M \cup N \cup P$.

10. Zadani su skupovi $E = \{s, o, k\}$, $L = \{s, o, v, a\}$ i $T = \{s, o, j, a\}$. Odredi:

a) $E \cap L \cap T$ **b)** $E \cup L \cup T$ **c)** $(L \cap T) \cup E$ **d)** $L \setminus T$ **e)** $T \setminus E$ **f)** $E \setminus L$.

11. U jednom razredu 15 učenika trenira rukomet, 10 odbojku, 4 učenika i rukomet i odbojku, a 3 učenika ne treniraju ni rukomet ni odbojku. Koliko je učenika u tom razredu? Koliko učenika trenira samo rukomet, a koliko samo odbojku? Prikaži rješenje Vennovim dijagramom.

12. Rastavi broj na proste faktore i odredi sve njegove djelitelje.

a) 24 **b)** 72 **c)** 64 **d)** 120 **e)** 130 **f)** 147

13. Odredi najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva:

a) 147, 98 **b)** 100, 125 **c)** 54, 72 **d)** 88, 121 **e)** 91, 65 **f)** 68, 85.

14. Odredi najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva 38, 95 i 133.

15. Dva jedrenjaka plove od Vodica do NP-a Kornati i natrag. Prvi plovi 8 sati, a drugi 9 sati. Za koliko će se sati ponovo sresti u Vodicama ako su oba jedrenjaka krenula u isto vrijeme?

16. Učenici jedne škole stali su u dugačku vrstu. Svaki šesti učenik nosi naočale, a svaki osmi ima plavu kosu. Navedi redni broj prvog učenika u vrsti koji nosi naočale i ima plavu kosu.

17. Odredi najmanji prirodni broj koji je djeljiv s 15 i s 51.

18. Napiši neki neparni četveroznamenkasti broj kojem su sve znamenke različite, a djeljiv je brojem 3 i brojem 5.

19. Zbroji sve cijele brojeve: **a)** od -5 do 132 **b)** od -451 do 455 **c)** od 24 do 99.

20. Odredi pet uzastopnih prirodnih brojeva čiji je zbroj 85

21. Odredi četiri uzastopna cijela broja čiji je zbroj -26.

22. Popuni tablicu.

Razlomak				$\frac{19}{100}$				$\frac{9}{40}$
Decimalni broj	0.1				0.09			
Postotak		8 %						
Omjer			3 : 20				7 : 8	

23. Vodostaj rijeke Drave izmjeren u Osijeku 18. kolovoza 2022. iznosio je -171 cm, što je najniži vodostaj u povijesti mjerenja. Najviši izmjeren vodostaj 25. lipnja 1965. iznosio je 542 cm. Kolika je razlika najnižeg i najvišeg vodostaja Drave u Osijeku?

24. Natjecatelj u kvizu dobiva 5 bodova za svaki točan odgovor, a oduzimaju mu se 3 boda za svaki netočan odgovor. Koliko je bodova ostvarila Ana ako je točno odgovorila na 4 pitanja, a netočno na 8 pitanja?

25. Iva je krenula na put biciklom u 8 sati i 15 minuta do prijateljice u susjednom gradu udaljenom 45 km. U prvih pola sata prešla je $\frac{2}{9}$ puta, u drugih pola sata 20 % puta, u sljedećih $\frac{1}{3}$ sata prešla je 6 km. Nakon toga napravila je pauzu od $\frac{2}{3}$ sata. Polovinu ostatka puta prošla je za pola sata. Na susret s prijateljicom stigla je u 11 sati i 30 minuta. Koliko je kilometara prešla u zadnjoj dionici puta i za koliko vremena?

26. Ulaznica za nogometnu utakmicu stoji 5.00 €. Na tribinama ima 9460 sjedećih mjesta. Na stadionu je ostalo prazno $\frac{3}{20}$ mjesta. Troškovi čišćenja stadiona iznose 2 % ukupnog prihoda s utakmice. Koliki prihod ostaje nakon plaćenog čišćenja?

27. U nekoj je školi, u jednoj smjeni, 182 učenika. Na određeni dan $\frac{1}{13}$ učenika bilo je odsutno zbog natjecanja, a $\frac{1}{7}$ zbog bolesti. Koliko je taj dan bilo učenika u školi? Izrazi rezultat postotkom.

28. Paralelno su spojena dva otpornika $R_1 = 1\ \Omega$ i $R_2 = 100\ \Omega$. Kombinacija je priključena na napon $U = 2\ \text{V}$. Izračunaj jakost struje izvora u amperima.
(Uputa: $U = I \cdot R$, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$)

29. Odredi je li vrijednost izraza prirodni broj.

a) $-1 + (-2) \cdot 3 - [2 + 8 : (-2) - 10 \cdot (-1) - 9]$ **b)** $1 + \frac{11}{25} : \left(3\frac{1}{3} - 2.5 \cdot \frac{4}{25}\right)$

c) $4 + (-21) : 3 - [5 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) - 36 : (-6)]$ **d)** $\left(4 \cdot 1\frac{3}{12} - 2\frac{5}{6}\right) : \frac{11}{12} + 0.5$

e) $\dfrac{\left(\frac{2}{5} - 1\right) \cdot 5 + \left(\frac{2}{7} + 1\right) \cdot 7}{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{16} \cdot 4}$ **f)** $\dfrac{36 \cdot 20 \cdot 45}{80 \cdot 15 \cdot 9}$

30. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\dot{1} \in \mathbb{I}$ **b)** $\sqrt{49} \in \mathbb{I}$ **c)** $-\left(\pi + \sqrt{42}\right) \in \mathbb{R}$ **d)** $0.88\dot{1} \in \mathbb{Q}$ **e)** $\frac{3\sqrt{36}}{4} \in \mathbb{Q}$ **f)** $-\frac{2\pi}{\pi} \in \mathbb{I}$

31. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ **b)** $\left\{\left(3\frac{1}{2}\right)^2, \left(\sqrt{33}\right)^2, 10^2\right\} \subseteq \mathbb{Q}$ **c)** $\left\{1, \sqrt{9}, \sqrt{81}\right\} \subseteq \mathbb{I}$ **d)** $\left\{1, \dot{2}, 1, \dot{3}\right\} \subseteq R$

32. Zaokruži istinite tvrdnje.

a) $\sqrt{17}\left(\sqrt{64} - 17\right) \in \mathbb{I}$ **b)** $\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right) \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right) \in \mathbb{I}$ **c)** $\left(\sqrt{27} - \sqrt{26}\right)^2 : \sqrt{25 + 26} \in \mathbb{Q}$

33. Svedi na isti zapis pa usporedi dva realna broja.

a) -52.61 i 52.6 **b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{7}}{9}$ i $\frac{\sqrt{7}}{10}$ **d)** 54 % i $\frac{\sqrt{14}}{7}$ **e)** $\frac{22}{7}$ i π **f)** $-3\frac{1}{4}$ i -3.25

34. Poredaj od najmanjeg broja do najvećega: $-\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\frac{1}{2}, 3.\dot{4}\dot{6}$.

35. Zapiši nekoliko racionalnih brojeva koji se nalaze između brojeva $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

36. Zapiši nekoliko iracionalnih brojeva koji se nalaze između brojeva $\frac{1}{7}$ i $\frac{2}{7}$.

37. Zaokruži realni broj na prvu, drugu i treću decimalu.

a) $\sqrt{15}\cdot(\pi+0.5)$ **b)** $0.7542 : 4\cdot\sqrt{2}$ **c)** $34.\dot{7}+7\cdot\sqrt{10}$ **d)** $2.34\dot{5}\dot{6} : (12+3\pi)$

38. Izračunaj upotrebom džepnog računala pa zaokruži na dvije decimale.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{12}$ **b)** $\frac{\sqrt{5}+2\pi}{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{24}-1}{10}$ **d)** $\frac{\sqrt{39}-1.46}{2.6}$ **e)** $\frac{5-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ **f)** $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{19}}{-4\left(\sqrt{17}-4\right)}$

39. Odredi:

a) $|-\pi|$ **b)** $\left|-\frac{9}{10}\right|$ **c)** $\left|3-4\sqrt{5}\right|$ **d)** $\left|-10-\sqrt{2}\right|$ **e)** $\left|5-2\sqrt{3}\right|$ **f)** $\left|3.75-\frac{15}{4}\right|$.

40. Odredi udaljenost točaka kojima su pridruženi brojevi:

a) -7 i 2 **b)** -8 i -5 **c)** -2.3 i -6.9 **d)** $-\frac{1}{8}$ i $\frac{3}{8}$ **e)** $\frac{13}{8}$ i 1.625 **f)** 1 i $\sqrt{3}$

41. Odredi koordinate točaka koje su za 5 udaljene od točke s koordinatom -3.

42. Zapiši nejednakosti uz pomoć intervala te prikaži te intervale na brojevnom pravcu.

a) $-8\le x\le 1.5$ **b)** $x<7$ **c)** $x\ge -3$ **d)** $0<x<\frac{6}{5}$ **e)** $x<0$ **f)** $-2\le x<-1$

43. Zapiši interval uz pomoć nejednakosti i prikaži ga na brojevnom pravcu.

a) $\langle 3, 4\rangle$ **b)** $\langle -\infty, 8\rangle$ **c)** $\langle -\infty, -9]$ **d)** $[-3, 8\rangle$ **e)** $[-5, 5]$ **f)** $\langle 6, +\infty\rangle$

44. Zadan je interval $[-1, 1\rangle$. Koji od brojeva $-1, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, \sqrt{2}, -\frac{1}{4}$ pripada zadanom intervalu? Koliko ima cijelih, a koliko prirodnih brojeva u intervalu?

45. Odredi presjek i uniju zadanih intervala te ih prikaži na brojevnom pravcu.

a) $\langle -4, 2\rangle$ i $\langle 0, 3]$ **b)** $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle -5, 3]$ **c)** $[-3.3, -2.2\rangle$ i $[-2.7, +\infty\rangle$ **d)** $\left[\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right]$ i $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

46. Koja je jednakost točna za recipročne brojeve a i b?

a) $a+b=0$ **b)** $a\cdot b=1$ **c)** $a=b$ **d)** $\frac{a}{b}=1$

47. Odredi $\frac{1}{n}$ ako je n:

a) $\frac{a}{a+b}$ **b)** $\frac{a}{b}-1$ **c)** $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$ **d)** $1-\frac{a}{4}$ **e)** $\frac{7}{2c+3d}$ **f)** $3+\sqrt{3}$.

48. Pojednostavni brojevni izraz.

a) $1.333\cdot 45+500+1333\cdot 55$ **b)** $31\cdot\frac{39}{50}+\frac{39}{50}\cdot 19$ **c)** $\frac{6}{7}\cdot 31+\frac{1}{5}\cdot 53-\frac{31}{7}\cdot 6+\frac{4}{5}\cdot 53$

49. Pojednostavni brojevni izraz.

a) $-1.4\sqrt{3}+1.2\sqrt{3}+3.8\sqrt{3}$ **b)** $\frac{1}{3}\sqrt{6}-\frac{4}{3}\sqrt{6}-\left(-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$ **c)** $-10\sqrt{5}-\sqrt{7}+3\sqrt{5}+7\sqrt{7}$

50. Pojednostavni brojevni izraz.

a) $\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{3}(x+1)$ **b)** $\frac{3}{4}(x-2)-(x-2)$ **c)** $6.7(x+y)+1.3(x+y)-(x+y)$

51. Parketar Zoran postavlja parket u učionicu dimenzija 6.5 m × 8 m. Kupio je 56 m^2 parketa. Koliko će mu parketa ostati? Izrazi rješenje u postotku.

52. Imamo na raspolaganju *n* jednakih otpornika. Jednom ih spajamo serijski, a drugi put paralelno. Ukupan otpor za serijski spoj 9 je puta veći nego za paralelni spoj. Koliko je otpornika *n* bilo spojeno ako znamo da je $R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n$ za serijski spoj i $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}$ za paralelni spoj?

53. Potrošnja vode u frizerskom salonu iznosila je 18 m^3 u travnju, 25 m^3 u svibnju i 20 m^3 u lipnju. Koliko iznosi prosječna potrošnja vode u tom tromjesečju?

54. Josip je u četiri mjeseca pročitao sljedeći broj knjiga: 3, 4, 5, 3. Želi li biti najčitatelj, mora imati prosjek pročitanih knjiga bar 4. Koliko minimalno knjiga Josip treba pročitati u petom mjesecu da bi zadovoljio taj uvjet?

55. Tvrtka za čišćenje kupuje sredstva za čišćenje od dobavljača A i B. Od dobavljača A kupljeno je 11 komada po 5.45 €, od dobavljača B 15 komada po 4.85 €. Kolika je prosječna cijena tog sredstva za čišćenje?

56. U ambulanti hitne pomoći rade medicinske sestre Ana koja ima 23 godine, Marija koja ima 22 godine, Patricija 19, Željka 20, Branka 18 godina. U ambulanti radi i Slavica. Koliko godina ima Slavica ako je njihov prosjek godina 21?

57. Treba pomiješati dvije nijanse boje A i B za fasadu u omjeru 2 : 3. Koliko treba staviti svake nijanse ako trebamo 150 kg boje?

58. Tehničari Ivan, Mario i Branko pozvani su odraditi izvanredni posao. Ivan je radio 30 sati, Mario 20 sati i Branko 40 sati. Kako će podijeliti iznos od 3150 € ako zaradu dijele u omjeru sati provedenih na poslu?

59. Nikica je za prijeđenih 1500 km potrošio 105 litara benzina. Odredi potrošnju vozila, tj. omjer količine benzina i prijeđenih kilometara.

60. U uzorku od 1200 osoba njih 80 ima spušteno stopalo. Odredi omjer osoba sa spuštenim stopalom i osoba bez spuštenog stopala te postotak osoba sa spuštenim stopalom u uzorku.

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

ŽELIM NA MATURU!

Zadatci višestrukog izbora

1. Na brojevnom pravcu prikazanom na slici dužina $\overline{OP}$ podijeljena je na 12 dijelova jednakih duljina. Koja je od označenih točaka s prikazanog brojevnog pravca pridružena broju $-\frac{2}{3}$?

A. P **B.** Q **C.** R **D.** S

2. Koji je od navedenih brojeva najveći?

A. 0.101 **B.** $0.10\dot{1}$ **C.** $0.1\dot{0}\dot{1}$ **D.** $0.\dot{1}0\dot{1}$

3. Aritmetička sredina brojeva 8, 10 i x iznosi 14. Koliko iznosi broj x?

A. 24 **B.** 20 **C.** 16 **D.** 12

4. Koji je najmanji zajednički višekratnik brojeva 18 i 30?

A. 48 **B.** 90 **C.** 54 **D.** 180

5. Koji od navedenih brojeva **ne pripada** skupu racionalnih brojeva?

A. $-\frac{16}{5}$ **B.** -6π **C.** -3 **D.** $\sqrt{144}$

6. Zaokruži jednakost opisanu rečenicom: Odredi točke na brojevnom pravcu koje su za 6 udaljene od –7.

A. $|x-7|=6$ **B.** $|x-6|=7$ **C.** $|x+6|=7$ **D.** $|x+7|=6$

7. Koji je od navedenih brojeva iracionalni broj?

A. $0.\dot{5}\dot{3}$ **B.** 0.9 **C.** $\sqrt{37}$ **D.** $\sqrt{625}$

8. Mirela ima sljedeće ocjene: 2, 3, 4, 4, 5 i 5. Koliko petica nedostaje Mireli za prosjek 4.5?

A. 5 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 8

9. Koliko je dvoznamenkastih brojeva djeljivih s pet i s dva?

A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

10. Koja je tvrdnja istinita za suprotne brojeve?

A. Zbroj suprotnih brojeva jest 0.
B. Umnožak suprotnih brojeva jest 0.
C. Razlika suprotnih brojeva jest 1.
D. Količnik suprotnih brojeva jest 1.

11. Koja od navedenih tvrdnji **nije istinita**?

A. $\sqrt{11}\in\mathbb{R}$ **B.** $-1\in\mathbb{Q}$ **C.** $0\in\mathbb{Z}$ **D.** $15.2\in\mathbb{I}$

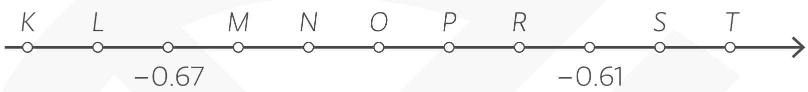
OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

Zadatci kratkog odgovora

12. Napiši jedan iracionalni broj koji je veći od 1 i manji od 3.

13. Napiši neki broj koji pri dijeljenju s brojem 14 daje ostatak 10.

14. Na brojevnom pravcu prikazanom na slici dužina $\overline{KT}$ podijeljena je na 10 dijelova jednakih duljina. Kojoj je točki označenoj na brojevnom pravcu pridružen broj -0.69?



15. Zlatica je zapisala sve cijele brojeve veće od -6, a manje od 4. Zlatko je zapisao sve cijele brojeve veće od -3, a manje od 6. Koliko su jednakih cijelih brojeva zapisali Zlatica i Zlatko?

16. Za koje je sve cijele brojeve m razlomak $\frac{1}{2m+5}$ cijeli broj?

17. Odredi $A \cup B$ ako su $A = \langle 1, 6 \rangle$ i $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 3\}$.

18. Usporedi brojeve $\sqrt{5}$ i 2.24 te $\frac{53}{100}$ i 0.5222.

19. Izračunaj $\left[23 - 4.5 \cdot \left(6 - \frac{11}{2}\right)\right] : \frac{83}{16}$.

20. U smjesi bijelog i kukuruznog brašna mase 144 kg ima 48 kg kukuruznog brašna. Odredi omjer količine bijelog i kukuruznog brašna.

21. Napiši jedan broj koji pripada skupu $\langle 4, 5 \rangle \cap \left[\frac{9}{2}, 6\right\rangle$.

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa

2. SUKLADNOST I SLIČNOST

2.1. Sukladnost trokuta

2.2. Četiri karakteristične točke trokuta

2.3. Talesov poučak o proporcionalnosti

2.4. Sličnost trokuta

2.5. Euklidov poučak

2.6. Trigonometrijski omjeri u pravokutnom trokutu

Ishod učenja

MAT SSŠ C.1.1. i MAT SSŠ D.1.2.
Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta.

✔ **Moći ćeš:**

- opisati karakteristične točke trokuta
- primijeniti poučke o sukladnosti i sličnosti trokuta te Talesov poučak u rješavanju problema
- primijeniti Heronovu formulu pri računanju površine trokuta
- riješiti probleme rabeći Euklidov poučak o pravokutnom trokutu
- povezati omjere duljina stranica i mjere kutova u pravokutnom trokutu
- računati vrijednosti trigonometrijskih omjera, duljine stranica te mjere šiljastih kutova u pravokutnom trokutu

OGLEDNO IZDANJE ©Alfa