

ŠTO KAŽU VAŠE KOLEGE...

Knjiga *Stvaranje učionica matematičkog promišljanja* odiše entuzijazmom prema učenicima, njihovim načinima razmišljanja i načinima na koje se njihove misli sjedinjavaju u moćne učionice matematičkog promišljanja. Pritom je i iznimno praktična s obzirom na to da prikazuje kako sve, od učiteljevih pitanja do razmještaja namještaja, može doprinijeti učenju vaših učenika.

Dan Meyer

glavni akademski direktor, Desmos

Ako vaši učenici nisu oni koji promišljaju u učionici, ovo je prava knjiga za vas! Peter Liljedahl daje konkretne upute za provedbu svake od ovih na istraživanjima utemeljenih 14 nastavnih praksi, prijedloge kako započeti s njihovim provođenjem, kao i odgovore na često postavljana pitanja, a sve s ciljem da vam pomogne stvoriti učionicu u kojoj je promišljanje učenika norma.

Peg Smith

suautorica knjige *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*
professor emeritus, Sveučilište u Pittsburghu
Pittsburgh, Pennsylvania

Okvir učionice matematičkog promišljanja Petera Liljedahla preko noći je preobrazio moju učionicu matematike. Bila sam frustrirana činjenicom da, unatoč davanju svega od sebe nastojeći ih nečemu naučiti, pojedini moji učenici do završnog ispita još uvijek nisu bili u stanju riješiti vrlo jednostavne probleme. Okvir mi je poslužio kao polazna točka i počela sam ga primjenjivati već sljedeći dan (nemojte čekati rujana da započnete!), a sljedeći su se koraci u nastavku primjene u mojoj nastavnoj praksi jednostavno razvili s 14 elemenata učionice matematičkog promišljanja. Učenici su počeli međusobno razgovarati, promišljati o složenim problemima, manje se oslanjati na mene – a više jedni na druge i, što je najvažnije od svega, postigli su bolji uspjeh u predmetima koje sam im predavala. Okvir učionice matematičkog promišljanja bio je upravo ono što smo moji učenici i ja trebali!

Laura Wheeler

nastavnica matematike u srednjoj školi
Školski odbor okruga Ottawa Carleton
Ontario, Kanada

Peter svoje istraživanje opisuje kao nešto čime se „malo pozabavio“, ali u tom njegovom „malom pozabavljanju“ – ako se mene pita – ključno je to što je uistinu obilazio stvarne učionice i promatrao kako se učenici ponašaju u njima. Najviše naučimo boraveći u stvarnim učionicama, razgovarajući s učenicima i otkrivajući kako oni promišljaju o matematičkim zadacima. Naši učenici trebaju postati bolji mislioci i trebaju vidjeti matematiku onakvom kakva ona zaista jest: predivan način promišljanja. Trebaju uvidjeti da i oni sami mogu doći do velikih spoznaja o zanimljivim matematičkim problemima.

Matthew Oldridge

autor knjige *Teaching Mathematics Through Problem-Solving
in K–12 Classrooms* (Rowman & Littlefield 2018)
učitelj, Školski odbor okruga Peel
Ontario, Kanada

Kao detaljan plan djelovanja potkrijepljen opsežnim istraživanjima i podacima, Liljedahlov plan može poboljšati svaku učionicu, a sam autor predviđa i daje odgovore na sva pitanja ili nedoumice koje možete imati u vezi s njegovom provedbom. Prema njegovu popisu mogućih ponašanja učenika suočenih s aktivnošću tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan, vrlo je jasno da Liljedahl razumije učenike koje poučavam: zabušante, odugovlačivače, folirante, oponašače i nekoliko onih „samopokušavača”. Ova knjiga opisuje metode za poboljšanje promišljanja i angažmana svih mojih učenika, a mnoge sam od njih uspjela primijeniti već sljedeći dan.

Leslie Mohlman

učiteljica matematike Školski okrug Alpine
Lehi, Utah

Rad Petera Liljedahla pristupačan je, nadahnut istraživanjima i utemeljen na učioničkoj praksi. Autor dubinski i jezgrovito istražuje što to znači poučavati, učiti i pratiti postignuća u učionici matematike u kojoj su učenici uistinu angažirani i promišljaju o zadanim problemima. U ovom ćemo se materijalu osobito prepoznati mi, osnovnoškolski učitelji. Peter dočarava naše često intuitivne poteze opisujući što to radimo kada sve dobro funkcionira i savjetujući kako smisleno promijeniti praksu kada ne funkcionira. Od načina na koji je razmješten namještaj do načina na koji se postavljaju matematička pitanja, od toga tko od učenika drži marker do toga kako među učenicima poticati produktivnu borbu i suočavanje s izazovima, Peter postavlja scenu za istinski angažman u matematici kod učenika svih uzrasta.

Carole Fullerton

voditeljica nastavnika matematike i nacionalna savjetnica za matematiku
Obrazovno savjetovalište Mind-Full
Vancouver, Britanska Kolumbija

Istraživanje u području obrazovanja koje je odmah primjenjivo i donosi saznanja važna za našu praksu neprocjenjivo je u današnjim školama i učionicama. Peter upotrebljava dokaze prikupljene u učionicama matematike da bi nam izravno priopćio kako u svoje poučavanje i učenje unijeti promjene koje poboljšavaju učenje. To je suština prakse utemeljene na dokazima, i to prakse utemeljene na dokazima upravo iz onih učionica na koje želimo utjecati.

John Almarode

izvanredni profesor pedagogije
Sveučilište James Madison
Harrisonburg, Vancouver

Nakon godina i godina provođenja nastave u formatu *Ja radim, mi radimo, vi radite* shvatio sam da mojim učenicima nedostaje produktivnog raspoloženja prema matematici i da lako odustaju od rješavanja problema. Znao sam da se nešto mora promijeniti, ali što bih ja mogao promijeniti u svojoj nastavnoj praksi i *kako* bih to mogao postići? Nakon deset godina eksperimentiranja s različitim pedagoškim pristupima, prilagođavanja učioničkog okruženja i razvijanja vlastitog poznavanja sadržaja, shvaćam da je ova knjiga izvor koji mi je mogao pomoći da ubrzam preobrazbu kojoj sam težio – da se odmaknem od učionice „oponašača” i stvorim učionicu „mislioca”. Uštedite si godine eksperimentiranja ulaganjem nekoliko sati u čitanje ove izvrsne knjige. Vaši će vam učenici biti zahvalni.

Kyle Pearce

konzultant za matematiku od predškole do kraja srednjoškolskog obrazovanja
MakeMathMoments.com i školski odbor okruga Greater Essex
Ontario, Kanada

Stvaranje učionica matematičkog promišljanja nastavni je *tour de force* za svakog učitelja matematike. Na temelju svoga opsežnog istraživanja Peter predlaže sasvim izvedive učioničke strukture i olakšavajuće korake učiteljima koji potiču učenike na promišljanje i napredovanje u promišljanju. Oduševljena sam što je knjiga konačno izašla!

Fawn Nguyen

Math TOSA, Školski okrug Rio
Oxnard, Kalifornija

Godinama sam na radionicama, u raznim člancima i na internetu slušala i čitala o učionicama matematičkog promišljanja. Ova je zanimljiva knjiga prikupila sve dijelove koje sam čula i vidjela te ih predstavila u lako čitljivom i, što je još važnije, primjenjivom paketu. Stvari koje su mi djelovale malo previše kao nešto što „ja nikada ne bih mogla” sada se čine izvedivima i nadahnuta sam da počnem uvoditi promjene. Ostaje mi dobro razmisliti o mnogo toga u mojoj trenutnoj praksi kako počinjem razmišljati o prelasku na učionicu matematičkog promišljanja.

Casey McCormick

nastavnica matematike od 5. do 8. razreda
Citrus Heights, Kalifornija

Stvaranje učionica matematičkog promišljanja potiče nas da razmislimo o potencijalu matematičkih učionica, učitelja i učenika. Potkrijepljena brojnim pričama iz učionica, knjiga je to u kojoj Peter metodički razotkriva poznate strukture poučavanja matematike koje potiskuju potencijal učenika, a zatim pažljivo iznosi niz mogućnosti oko kojih učitelji matematike mogu organizirati dinamičnu i responzivnu učionicu.

Nat Banting

dobitnik Memorijalne nagrade Margaret Sinclair 2019.
i Rosenthalove nagrade Nacionalnog muzeja matematike 2019.
Saskatchewan, Kanada

Iako postoje brojne inovacije u području poučavanja matematike, malo ih progovara kroz poseban objektiv stvaranja okruženja u kojem je promišljanje učinjeno vidljivim, u kojem je promišljanje javno, u kojem je pozitivna međuovisnost povezana s individualnom i/ili skupnom odgovornošću, u kojem se učenici oslanjaju na vlastite sposobnosti, kao i na znanje svojih razrednih kolega. Okruženja u kojem je učitelj oslobođen dugih zadataka i može promatrati cjelokupni rad učenika i pratiti proces promišljanja na djelu. Drugim riječima, promišljanje postaje jasno vidljiv pokretač u takvom okruženju. Sve to ide u prilog prijenosu odgovornosti na učenike. Uvažava njihove glasove, dopušta prepreke u učenju i čini promišljanje javnijim, čime podržava i potiče riskiranje u sigurnom i poticajnom okruženju.

Yana Ioffe

ravnateljica škole
Corwinova savjetnica
Ontario, Kanada

Ova je knjiga pravovremena i daje točan prikaz onoga što se događa u matematičkim učionicama diljem zemlje. Knjiga je vrijedan alat za promišljanje koji učitelji mogu upotrijebiti dok analiziraju vlastitu nastavnu praksu.

Kenneth Davis

nastavnik matematike i voditelj Odjela srednjoškolskog obrazovanja
Školski okrug Beloit
Beloit, Wisconsin

Peterov rad na stvaranju učionica matematičkog promišljanja daleko je najutjecajnija (začetnica) promjena u srednjoškolskom matematičkom obrazovanju kojoj sam svjedočio. Nikada nisam vidio neku drugu ideju odnosno pristup koji je odmah zaplijenio pažnju toliko učitelja i prešao točku od otkrivanja do stvarne provedbe u gotovo svakoj učionici ili slučaju kojem sam svjedočio.

Mishaal Surti
savjetnik za obrazovanje
Ontario, Kanada

Za učitelje koji se nadaju preobraziti svoju nastavnu praksu Peter je napisao nezamjenjiv izvor. Njegov razgovorni stil čini ovo djelo i zanimljivim za čitanje i lakim za praćenje. On opisuje bogat skup praksi koje će pomoći učiteljima matematike preobraziti, na pozitivan način, sve u svojoj učionici. Peter svojim vjerodostojnim i praktičnim savjetima pretvara taj zastrašujući izazov u nešto što je moguće svladati.

David Wees
viši sastavljač kurikula
DreamBox Learning
Britanska Kolumbija, Kanada

Urednički predgovor za hrvatsko izdanje knjige *Stvaranje učionica matematičkog promišljanja*:

Dragi čitatelji!

S velikim zadovoljstvom predstavljam vam hrvatsko izdanje knjige *Stvaranje učionica matematičkog promišljanja* čiji je autor Peter Liljedahl. Ova vrijedna knjiga donosi novosti iz metodike nastave matematike te mnoge praktične savjete i strategije poučavanja. Unatoč tomu što smo možda neke metode poučavanja i strategije već vidjeli i isprobali u nekom obliku, ovdje ćemo ih doživjeti u novom svjetlu strukturirane u skupine alata.

Knjiga je pisana jednostavnim i učitelju bliskim jezikom. Od prvih je rečenica inspirativna jer s lakoćom prenosi autorov entuzijazam. Mnoge je učitelje diljem svijeta potaknula na temeljite promjene u poučavanju jer su se osvjedočili da primjena opisanih alata pozitivno utječe na razrednu klimu i matematičko promišljanje učenika.

Uvjerena sam da će svaki učitelj i svi oni koji se bave poučavanjem matematike pronaći barem nešto što će ih zaintrigirati da isprobaju u svojoj nastavi jer je nemoguće pročitati knjigu i ostati ravnodušan. Čak i kada neće ići baš onako kako ste isplanirali, sigurna sam da ćete razmišljati o tome što možete promijeniti sljedeći put kako bi sat tekao još bolje. Ova knjiga namijenjena je svima koji su spremni uložiti trud u promjene, ma koliko malene, jer će nakon njih neminovno uslijediti i one velike.

S poštovanjem,
Tea Borković, prof.
urednica

STVARANJE UČIONICA MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA

OD PREDŠKOLE DO KRAJA SREDNJOŠKOLSKOG OBRAZOVANJA

Za svakog učitelja koji je imao hrabrosti promijeniti se.

STVARANJE UČIONICA MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA

14 nastavnih praksi za poboljšanje učenja

OD PREDŠKOLE DO KRAJA SREDNJOŠKOLSKOG OBRAZOVANJA

Peter Liljedahl

Predgovor napisala Tracy Johnston Zager

Ilustrirala Laura Wheeler

Prevela Ivana Šabić Biloderić

1. izdanje



Zagreb 2025.



Nakladnik
ALFA d. d. Zagreb
Nova Ves 23a
Za nakladnika
Ivan Petric
Direktorica nakladništva
mr. sc. Daniela Novoselić
Urednica
Tea Borković
Lektura i korektura
Kristina Ferenčina
Prevela
Ivana Šabić Bilođerić
Ilustrirala
Laura Wheeler
Likovno i grafičko oblikovanje
Ivan Herceg
Naslovnica
Laura Wheeler
Tisak
Ografika

Proizvedeno u Republici Hrvatskoj, EU

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 001254980.

Stvaranje učionica matematičkog promišljanja, od predškole do kraja srednjoškolskog obrazovanja: 14 nastavnih praksi za poboljšanje učenja je prijevod knjige *Building thinking classrooms in mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning* by the author Peter Liljedahl and copyright © 2020 Corwin

Prijevod je pripremljen prema ugovoru s Corwin Press, Inc., SAGE Publications, Inc. company

Autorska prava za hrvatsko izdanje © 2025 Alfa.d.d.

SADRŽAJ

Predgovor: Tracy Johnston Zager	xvi
Zahvale	xix
O autoru	xxii
Uvod	1
Učenici ne promišljaju	7
Institucionalne norme	11
Prema učionici matematičkog promišljanja	12
Kako čitati ovu knjigu	16

POGLAVLJE 1: KOJE TIPOVE ZADATAKA PRIMJENJUJEMO U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA

18



Problematika	19
Problem	24
Prema učionici matematičkog promišljanja	25
Često postavljana pitanja	30
Sažetak	35
Makropotez	35
Mikropotezi	35
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	36
Isprobajte ovo	37

POGLAVLJE 2: KAKO FORMIRAMO SURADNIČKE SKUPINE U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA

38



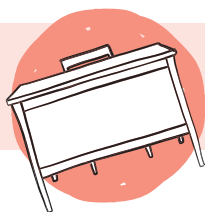
Problematika	39
Problem	40
Prema učionici matematičkog promišljanja	43
Spremnost na suradnju	46
Uklanjanje društvenih prepreka	47
Povećana mobilnost znanja	47
Povećan entuzijazam za učenje matematike	48
Smanjen društveni stres	48

Često postavljana pitanja	49
Sažetak	54
Makropotez	54
Mikropotezi	54
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	55
Isprobajte ovo	55



POGLAVLJE 3: GDJE UČENICI RADE U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 56

Problematika	57
Problem	57
Prema učionici matematičkog promišljanja	58
Često postavljana pitanja	64
Sažetak	66
Makropotez	66
Mikropotezi	66
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	67
Isprobajte ovo	67



POGLAVLJE 4: KAKO RAZMJEŠTAMO NAMJEŠTAJ U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 70

Problematika	71
Problem	71
Prema učionici matematičkog promišljanja	72
Često postavljana pitanja	77
Sažetak	79
Makropotez	79
Mikropotezi	79
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	79
Isprobajte ovo	80



POGLAVLJE 5: KAKO ODGOVARAMO NA PITANJA U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 82

Problematika	83
Problem	83
Pitanja iz blizine	84

Pitanja za prestanak promišljanja	86
Pitanja za nastavak promišljanja	87
Prema učionici matematičkog promišljanja	87
Često postavljana pitanja	91
Sažetak	95
Makropotez	95
Mikropotezi	95
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	95
Isprobajte ovo	96

POGLAVLJE 6: KADA, GDJE I KAKO ZADAJEMO ZADATKE U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA **98**



Problematika	99
Problem	99
Prema učionici matematičkog promišljanja	101
Kada zadati zadatak	101
Gdje zadati zadatak	103
Kako zadati zadatak	104
Često postavljana pitanja	111
Sažetak	115
Makropotez	115
Mikropotezi	115
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	115
Isprobajte ovo	116

POGLAVLJE 7: KAKO IZGLEDA DOMAĆA ZADAĆA U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA **118**



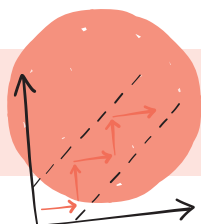
Problematika	119
Problem	119
Učenik nije napisao zadaću	120
Učenik je varao	121
Učenik je imao pomoć sa zadaćom	122
Učenik je sam pokušao riješiti zadaću	123
Prema učionici matematičkog promišljanja	125
Često postavljana pitanja	127
Sažetak	130
Makropotez	130

Mikropotezi	130
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	130
Isprobajte ovo	131



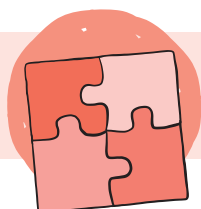
POGLAVLJE 8: KAKO POTIČEMO AUTONOMIJU UČENIKA U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 132

Problematika	133
Problem	134
Prema učionici matematičkog promišljanja	134
Često postavljana pitanja	139
Sažetak	141
Makropotez	141
Mikropotezi	141
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	142
Isprobajte ovo	142



POGLAVLJE 9: KAKO KORISTIMO HINTOVE I NADOGRADNJE U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 144

Problematika	145
Problem	145
Prema učionici matematičkog promišljanja	146
Korištenje nadogradnji radi održavanja zanesenosti	148
Korištenje <i>hintova</i> radi održavanja zanesenosti	156
Korištenje promjena u načinu angažmana radi održavanja zanesenosti	158
Često postavljana pitanja	160
Sažetak	165
Makropotez	165
Mikropotezi	165
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	166
Isprobajte ovo	167



POGLAVLJE 10: KAKO KONSOLIDIRAMO LEKCIJU U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 170

Problematika	171
Problem	171

Prema učionici matematičkog promišljanja	172
Često postavljana pitanja	179
Sažetak	183
Makropotez	183
Mikropotezi	183
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	183
Isprobajte ovo	184

POGLAVLJE 11: KAKO UČENICI VODE BILJEŠKE U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 186

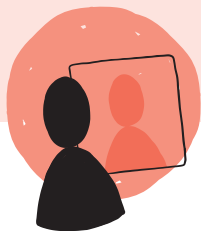


Problematika	187
Problem	187
Prema učionici matematičkog promišljanja	193
Često postavljana pitanja	201
Sažetak	205
Makropotez	205
Mikropotezi	205
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	205
Isprobajte ovo	206

POGLAVLJE 12: ŠTO BIRAMO VREDNOVATI U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 208

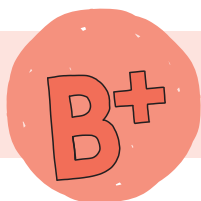


Problematika	209
Problem	210
Prema učionici matematičkog promišljanja	211
Korištenje rubrika za vrednovanje	211
Izrada rubrike	217
Korištenje rubrike	220
Često postavljana pitanja	221
Sažetak	224
Makropotez	224
Mikropotezi	224
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	225
Isprobajte ovo	226



POGLAVLJE 13: KAKO KORISTIMO FORMATIVNO PRAĆENJE U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 298

Problematika	229
Prema učionici matematičkog promišljanja	231
Često postavljana pitanja	240
Sažetak	247
Makropotez	247
Mikropotezi	247
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	247
Isprobajte ovo	248



POGLAVLJE 14: KAKO OCJENJUJEMO U UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 250

Problematika	251
Problem	252
Paradigma prikupljanja bodova	252
Paradigma prikupljanja podataka	255
Prema učionici matematičkog promišljanja	256
Oblikovanje ocjene	260
Često postavljana pitanja	265
Sažetak	274
Makropotez	274
Mikropotezi	274
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	275
Isprobajte ovo	275



POGLAVLJE 15: POVEZIVANJE SVIH 14 PRAKSI KAKO BISMO STVORILI UČIONICU MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA 276

Istraživanje	277
Stvaranje učionice matematičkog promišljanja	278
Komplet alata #1	280
Komplet alata #2	281
Komplet alata #3	282
Komplet alata #4	283
Prijenos kolektivne sinergije u individualno znanje i djelovanje	285

Ponovno stvaranje učionice matematičkog promišljanja	290
Komplet alata #1	291
Komplet alata #2	292
Vidjeti šumu od stabala	293
Često postavljana pitanja	294
Pitanja o kojima biste trebali razmisliti	296
Literatura	297

PREDGOVOR

„Istraživanja pokazuju...”

U obrazovanju ovaj izraz često prate tvrdnje o tome što u poučavanju i učenju funkcionira. Redovito se uhvatim kako uzvraćam protupitanjima tražeći pojašnjenja:

„Što mislite pod *istraživanjem*? Kako je točno osmišljena vaša studija?”

„Kako je u njoj definiran *uspjeh*? Uspjeh za koga, pod kojim uvjetima?”

„Što mislite pod *učinkovitim*? Kako je učinkovitost *mjerena* u toj istraživačkoj studiji koju navodite?”

Ponekad su odgovori razočaravajući. Primjerice, rijetko budem uvjerena da bismo trebali mijenjati nastavne prakse na temelju nekog istraživanja koje je koristilo samo jedno mjerilo uspjeha, poput rezultata godišnjih standardiziranih testova, i koje je provedeno tako da istraživači nisu nogom kročili u predmetne učionice i promatrali što se u njima uistinu događa. U drugim sam slučajevima očarana i informirana istraživanjem – ako je to istraživanje uključivalo promišljeno i ozbiljno proučavanje poučavanja, učenja i promišljanja učenika.

Rad Petera Liljedahla ta je druga vrsta istraživanja, istraživanja kojega se ne mogu zasititi. Čitajući ga, jasno je da *istraživanje* znači razmatranje važnih, provjerljivih pitanja na uzorku od više od četiri stotine učitelja i njihovih tisuća učenika tijekom petnaest godina; *uspjeh* znači nagnati što više tih učenika da na satu matematike promišljaju što dulje; *učinkovito* opisuje nastavne odluke i prakse koje stvaraju uvjete za promišljanje učenika; a rezultati se *mjere* promatranjem onoga što učenici rade: Koliko je sekundi potrebno učenicima da prionu na posao? Koliko dugo ustraju? Koliko su angažirani? Koliko si često odvrću pažnju posezanjem za telefonima? Tko sudjeluje u radu? Koliko učenici pričaju? Koliko se matematičko znanje prenosi iz jedne skupine u drugu?

Liljedahl je proučavatelj učenika. Uvažavajući ih, promatrajući i razgovarajući s njima, prikupio je iznimno korisne informacije o jednom od najdelikatnijih pitanja u obrazovanju: Što funkcionira? Na primjer, ima li razlike u tome hoće li učitelji zadati učenicima zadatak projicirajući ga

na nekoj površini, dijeleći ga isprintanog na papiru, zapisujući na ploču broj stranice udžbenika na kojoj se nalazi ili usmeno ga objašnjavajući? (Ispostavilo se da ima!) Dok učitelji zadaju taj zadatak, je li važno sjede li učenici ili stoje? (Važno je.) Koliki utjecaj ima trenutak zadavanja zadatka unutar nastavnog sata? (Velik.) Dok učenici rješavaju zadatak, bi li trebali pisati bilježnice, velike blokove (engl. *flipchart papers*) ili površine s kojih se može brisati? Raditi u skupinama ili pojedinačno? Ako rade u skupini, trebaju li svi učenici imati marker ili samo jedan od njih? Koja je optimalna veličina skupine? Kako bi te skupine trebale biti formirane? Koliko bi se često trebale mijenjati? To su samo neka od stotina pitanja koja su Liljedahl i njegove kolege razmatrali i testirali u desetcima tisuća sati eksperimentiranja u učionici kako bi otkrili što funkcionira i što je važno. Kada su otkrili određenu tehniku koja je donijela značajan napredak tijekom dvotjednog ispitivanja – mjerenu povećanim angažmanom i promišljanjem učenika – surađivali su s učiteljima kako bi u idućih nekoliko tjedana poboljšali tu tehniku, a zatim su testirali rezultate s brojnim drugim učiteljima u različitim okruženjima tijekom duljih razdoblja. Samo su trajne tehnike koje su dovele do najviše promišljanja učenika i koje su bile prenosive među učiteljima i školama dospjele u ovu knjigu.

Praktičan, čitak izvor koji držite u rukama golem je dar i vodič učiteljima matematike. Liljedahl je utvrdio najučinkovitije promjene koje možemo provesti kako bismo potaknuli učenike na promišljanje i postigli da promišljaju dulje. Organizirao je te promjene u intuitivan Okvir tako da možemo započeti čim se osjetimo spremni i možemo primjenjivati ih dio po dio. Liljedahl se služi zdravim razumom, osvježavajućim iskrenim glasovima učenika i svakodnevnim jezikom kako bi opisao ideje i ponašanja: kada govori o zadacima tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan ili bilješkama tipa ja-pišem-vi-pišete, znamo točno na što misli. Svaki je trenutak utemeljen na stvarnosti učionice, a put koji je pred nama čini se mogućim prijeći zbog načina na koji nam ga je on zacrtao. Dok sam čitala knjigu, često bih potvrdno kimala glavom, zahvalna što je organizirao i opisao svoja otkrića s tolikom jasnoćom da te promjene možemo provoditi inkrementalno, u najučinkovitijem slijedu mogućem.

Međutim, inkrementalno ne znači postupno. Iako su određeni pomaci praktični i izvedivi, djelovat će razorno – to zapravo i jest osnovna ideja. Liljedahl uvjerljivo obrazlaže da moramo prekinuti s duboko ukorijenjenim obrascima škole. Učenici dolaze na prag naše učionice očekujući isti poznati scenarij: oni zauzimaju svoja mjesta, a mi stojimo u prednjem dijelu učionice. Na ploči im pokazujemo kako se nešto radi i oni to prepisuju. Zatim oponašaju ono što smo im pokazali primjerima rješavanja zadataka, prvo u domaćim zadaćama i na kraju na ispitu koji se boduje postotkom riješenosti. Prolazeći sadržaj *Stvaranja učionica ma-*

tematičkog promišljanja, iz Liljedahlove oprečne logike učimo preispitivati i zamijeniti svaki od tih poznatih obrazaca drukčijim, učinkovitijim, u učionici isprobanim tehnikama. Umjesto da sjede tijekom rasprave, učenici stoje. Umjesto da prazne glave zapisuju bilješke samo kako bi nama udovoljili, učenici vode bilješke koje će im biti od pomoći kasnije kada nešto zaborave. Umjesto da samo oponašaju naše metode, zajednički promišljaju o novim problemima i tako dalje. Ove promjene ne provodimo zbog pukih promjena, niti iz ideoloških razloga, već zato što te prakse dovode do povećanog promišljanja učenika u stotinama različitih učionica. Sagledane u cjelini, te prakse nagovještavaju učenicima da je ovaj predmet drukčiji od drugih: na ovom će se predmetu od njih očekivati da promišljaju.

Zašto je to važno? Zato što se većina naših učenika u velikoj mjeri bavi tzv. „studentingom”, a malo promišljanjem. Učenicima iz zajednica u kojima je u prošlosti bilo uskraćeno učenje matematike često je uopće uskraćen pristup promišljanju. Zbog zdravlja naših učenika i naših društava moramo preispitati institucionalne norme i stvoriti učionice matematičkog promišljanja u kojima cijesimo promišljanje i uloženo vrijeme učenika umjesto da se koristimo naslijeđenim praksama koje potiču učenike da svoj put kroz sustav krče zabušavanjem, odugovlačenjem, oponašanjem i foliranjem. U Poglavlju 9 Liljedahl je napisao da „cilj stvaranja učionica matematičkog promišljanja nije pronaći angažirajuće zadatke o kojima će učenici promišljati, već stvoriti angažirane učenike koji su voljni promišljati o bilo kojem zadatku”.

S obzirom na golemost problema s kojima se svi suočavamo, posebno sam nestrpljiva u iščekivanju da učitelji primijene ideje i tehnike iz *Stvaranja učionica matematičkog promišljanja*. Postoji li išta važnije i hitnije od poučavanja učenika kako promišljati?

Tracy Johnston Zager

autorica knjige *Becoming the Math Teacher You Wish You'd Had: Ideas and Strategies from Vibrant Classrooms*

ZAHVALE

U izradu svake knjige uključeno je iznimno mnogo ljudi. U slučaju *Stvaranja učionica matematičkog promišljanja* sve je počelo sa stotinama učitelja koji su sudjelovali u našem istraživanju. Bez njihove spremnosti na promjene i hrabrosti da mi dopuste zaviriti u svoje učionice ne bi bilo moguće napisati ovu knjigu. Zahvaljujem vam na vašoj profesionalnosti i predanosti svom zanatu. Također dugujem zahvalnost učiteljima koji su zagovarali Okvir učionica matematičkog promišljanja među svojim kolegama. Vaš je entuzijazam bio zarazan i uvelike je pridonio uspjehu samog Okvira. Zahvaljujem vam što ste tako dobri ambasadori mog rada. Želim zahvaliti i svojoj supruzi Theresi. Kada mi se god pružila mogućnost da radim s još jednim učiteljem, s još jednom školom ili s još jednim školskim odjelom; ili da se ukrcam na zrakoplov i održim još jedno predstavljanje učionica matematičkog promišljanja, njezin je odgovor uvijek bio isti: „Ako će to promijeniti iskustvo samo jednog jedinog učenika, moraš se odazvati.” Tvoje nepokolebljivo ohrabrenje, podrška i vjera da mogu nešto promijeniti učinili su sve ovo mogućim. Na kraju, želim zahvaliti cijelom timu u Corwinu, počevši od urednice za matematička izdanja Erin Null. Ne samo da si vjerovala kako se *Stvaranje učionica matematičkog promišljanja* može pretvoriti u knjigu, već si mi i pomogla pronaći glas potreban za to. Želim zahvaliti Lauri Wheeler na ilustriranju ove knjige. Otkada sam počeo pisati o Okviru stvaranja učionica matematičkog promišljanja i predstavljati ga, pronalazila si načine za oživljavanje mojih riječi pomoću svoje umjetnosti. Također zahvaljujem urednici za razvoj sadržaja Jessici Vidal, koja je radila rame uz rame s Laurom i sa mnom kako bismo stvorili predodžbu o tome kako će ova knjiga oživjeti, kako će izgledati i kako će je biti držati u rukama; pomoćnici urednice Caroline Timmings i urednici za produkciju Tori Mirsadjadi, koje su doprinijele u mnogim tehničkim aspektima pretvaranja rukopisa u stvarnu knjigu; i višoj direktorici marketinga Margaret O'Connor, koja je toliko naporno radila kako bi ova knjiga završila u vašim rukama.

Dijelove istraživanja predstavljenog u ovoj knjizi financiralo je Kanadsko vijeće za istraživanje društvenih i humanističkih znanosti.

ZAHVALE IZDAVAČA

Corwin ljubazno zahvaljuje na doprinosu sljedećim recenzentima:

John Almarode
izvanredni profesor pedagogije
Sveučilište James Madison
Harrisonburg, Vancouver

Avital (Tali) Amr
savjetnica za matematiku, kurikulum i usluge podučavanja
Okružni školski odbor regije York
Ontario, Kanada

Kenneth Davis
nastavnik matematike i voditelj Odjela srednjoškolskog obrazovanja
Školski okrug Beloit
Beloit, Wisconsin

Yana Ioffe
ravnateljica škole
Corwinova savjetnica
Ontario, Kanada

Tricia Loney
koordinatorka nastave matematike u srednjoj školi
Školski odbor okruga Thames Valley
Ontario, Kanada

Kristen Mangus
pomoćna učiteljica matematike
Sustav javnih škola okruga Howard
Crownsville, Maryland

Casey McCormick
nastavnica matematike od 5. do 8. razreda Citrus Heights, Kalifornija

Ruth Harbin Miles
sveučilišna profesorica i umirovljena supervizorka poučavanja
matematike od predškole do kraja srednjoškolskog obrazovanja
Sveučilište Mary Baldwin
Madison, Vancouver

Leslie Mohlman
nastavnica matematike
Školski okrug Alpine
Lehi, Utah

Fawn Nguyen
Math TOSA (Teacher on Special Assignment, Učitelj na posebnom zadatku)
Školski okrug Rio
Oxnard, Kalifornija

Matthew Oldridge
učitelj, autor knjige *Teaching Mathematics Through Problem-Solving in K-12 Classrooms* (Rowman & Littlefield 2018)
Školski odbor okruga Peel
Ontario, Kanada

Kyle Pearce
savjetnik za matematiku od predškole do kraja srednjoškolskog obrazovanja
MakeMathMoments.com i Školski odbor okruga Greater Essex
Ontario, Kanada

Mishaal Surti
obrazovni savjetnik
Ontario, Kanada

David Wees
viši sastavljač kurikula
DreamBox Learning
Britanska Kolumbija, Kanada

Laura Wheeler
nastavnica matematike u srednjoj školi
Školski odbor okruga Ottawa Carleton
Ontario, Kanada

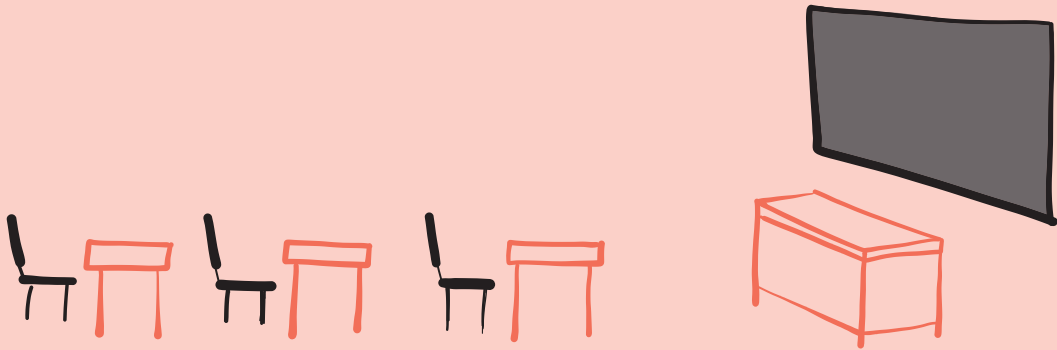
o AVTORU



Fotografija ustupljena ljubaznošću Sveučilišta Simon Fraser.

Dr. Peter Liljedahl profesor je matematičkog obrazovanja na Sveučilištu Simon Fraser u Vancouveru u Kanadi. Aktualni je predsjednik Kanadske grupe za proučavanje matematičkog obrazovanja (Canadian Mathematics Education Study Group, CMESG), bivši predsjednik Međunarodne grupe za psihologiju matematičkog obrazovanja (International Group for the Psychology of Mathematics Education, IGPME), urednik *Međunarodnog časopisa za prirodoslovno i matematičko obrazovanje* (*International Journal of Science and Mathematics Education,*

IJSME), član uredničkog odbora pet velikih međunarodnih časopisa i član istraživačkog odbora NCTM. Peter je autor ili suautor brojnih knjiga, poglavlja u knjigama i članaka u časopisima o temama ključnim za poučavanje i učenje matematike. Bivši je srednjoškolski nastavnik matematike koji je svoja istraživanja usko vezao uz stvarne učionice te se redovito savjetuje s učiteljima, školama, školskim okruzima, ministarstvima obrazovanja i sveučilištima o pitanjima poučavanja i učenja, praćenja učeničkih postignuća i matematičke pismenosti. Peter je tražen predavač koji je diljem svijeta držao predavanja na temu stvaranja učionica matematičkog promišljanja, za što je osvojio nagradu Cmolik za unapređenje javnog obrazovanja i Memorijalnu nagradu Margaret Sinclair Instituta Fields za inovaciju i izvrsnost u matematičkom obrazovanju.



UVOD



Kada sam prvi put susreo Jane 2003. godine, predavala je višim razredima osnovne škole već petnaest godina. Iako se osjećala samopouzdana poučavati matematiku, na vidiku je bio novi kurikulum – a šušalo se da će taj novi kurikulum imati veći fokus ne samo na rješavanju problema već i na poučavanju *pomoću* rješavanja problema. U svojih petnaest godina poučavanja Jane se nikada nije bavila ni jednim ni drugim. Stoga je pomislila da bi trebala preduhitriti novi kurikulum, sama naučiti nešto o rješavanju problema i početi se igrati tim pristupom u svojoj učionici.

Jane je o meni znala tri stvari. Prvo, znala je da volim rješavanje problema. Moje se istraživanje u to vrijeme, u suštini, bavilo kreativnošću u rješavanju problema i na tu sam temu baš održavao radionice za učitelje u njezinom školskom okrugu. Drugo, Jane je znala da radim na doktoratu, da u tom trenutku nisam bio u nastavi i da sam stoga imao dovoljno slobodnog vremena. I treće, znala je moju adresu e-pošte. Ne znam kako je Jane znala išta od navedenoga s obzirom na to da je nikada nisam upoznao niti sam čuo za nju. Ipak, jednog dana 2003. godine poslala mi je e-poruku:

Jane Pozdrav. Željela bih uvrstiti rješavanje problema u svoju nastavu matematike u 7./8. razredu. Možete li mi ikako pomoći?

Fantastično! Već sam nekoliko godina bio izvan nastave i nedostajalo mi je predavati. Za mene je to bila prilika ne samo da se vratim u učionicu već i da se pozabavim rješavanjem problema s učenicima.

Peter Rado bih Vam pomogao. Predlažem da se nađemo i porazgovaramo o svemu. Mogu već sutra doći u školu. U kojoj ste učionici i kada završavate s nastavom?

I tako sam se sljedeći dan pojavio na Janeinim vratima u 15:15 s velikim osmijehom na licu. Ovo će biti sjajno.

Međutim, Jane (koja je očito već bila radila s istraživačima) nije dijelila moje oduševljenje.

Jane Gledajte. Prije nego uopće krenemo razgovarati o rješavanju problema, želim razjasniti nekoliko stvari. Prvo, ne želim nikakvo vaše veselje i entuzijizam u svojoj učionici. Ne želim zajednički poučavati s vama. Čak niti ne želim zajednički raditi planove s vama. Sve što od Vas zapravo želim jesu dobri problemi koje bih mogla koristiti za rješavanje u nastavi matematike u 7./8. razredu. Ne znam zašto nam uopće treba sastanak.

To nikako nisam očekivao. Zapravo, bilo je to najdalje moguće od onoga što sam očekivao. Ali nisam se dao obeshrabriti i nakon 15 minuta rasprave postigli smo zategnut dogovor – na neki način. Dat ću Jane neke *dobre* probleme koje će moći pokušati rješavati sa svojim učenicima, a ona će meni zauzvrat dopustiti promatrati kako se to odvija. No Jane je postavila određena pravila.

Jane Prvo, morate se držati one klupe [pokazujući na klupu u stražnjem dijelu prostorije]. Ne smijete se obraćati učenicima. I ni pod razno ne smijete se obraćati meni.

I tako smo započeli suradnju – na neki način.

Prvi problem koji sam dao Jane potjecao je od Lewisa Carrolla i bio je to problem koji sam upotrijebio bezbroj puta sa svojim učenicima 8. razreda osnovne i 1. razreda srednje škole. Znao sam da je riječ o dobrom problemu. Njegov je kontekst bio angažirajući, odgovor nije bio trivijalan, a za rješavanje samog problema nije bilo potrebno nikakvo napredno matematičko znanje. I moji su učenici uživali raspravljajući o različitim odgovorima do kojih su došli.

Ako 6 mačaka može ubiti 6 štakora u 6 minuta, koliko je mačaka potrebno da ubiju 100 štakora u 50 minuta? (Lewis Carroll 1880)

I tako sam sljedećeg jutra sjedio u Janeinoj učionici i promatrao je kako zapisuje ovaj problem na ploču. Prije nego što vam ispričam što se zatim dogodilo, dopustite mi da se osvrnem na nekoliko detalja. Kao što sam već spomenuo, Jane je predavala punih petnaest godina i do tog dana u svojoj nastavi nikada nije koristila rješavanje problema. Njezini su učenici sjedili u klupama razmještenim u redovima, a neki su redovi bili spojeni tako da su učenici sjedili u parovima (pogledajte Sliku u.1). Učenici

nisu imali svoja određena mjesta, nego su sjedili i radili s kim su htjeli. Njezin je tipični sat, rekla mi je Jane, počinjao pregledavanjem domaće zadaće. Potom je slijedilo predavanje, tijekom kojeg bi Jane pokazivala kako rješavati zadatke, a učenici bi pisali bilješke. Pred kraj sata Jane bi zamolila učenike da riješe ono što ja zovem zadatcima tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan, a za nekoliko bi minuta s učenicima provjerila odgovore. Nakon nekoliko takvih zadataka zadala bi domaću zadaću iz udžbenika, radne bilježnice ili listića, a učenici bi ostatak sata rješavali zadaću. Ukratko – bila je to tipična učionica matematike i tipičan sat matematike. Oh, i bio je svibanj – šest tjedana prije kraja školske godine.



Slika u.1 Učenici u tradicionalnoj učionici rješavaju zadatak.

Izvor: skyneshner/iStock.com

Znajući te informacije, što mislite kako je s učenicima prošao Janein prvi pokušaj korištenja problema kao što je ovaj? Da – bilo je katastrofalno. Čim je Jane zatražila od učenika da riješe zadatak napisan na ploči, u zrak se podigla šuma ruku i Jane se pokrenula. Išla je od učenika do učenika, od para do para, pomagala učenicima koji nisu bili sigurni što trebaju učiniti, rade li dobro i je li odgovor do kojeg su došli točan. Prilično brzo učenici su se obeshrabrili i počeli odustajati. Od tog je trenutka Jane provodila podjednako vremena ohrabrujući učenike koji su odustajali i pomažući učenicima koji su još uvijek rješavali zadatak.

Sve to vrijeme ja sam sjedio u stražnjem dijelu prostorije u dodijeljenoj mi klupi – ne obraćajući se učenicima i ni pod razno ne obraćajući se Jane. Dok sam promatrao ovu katastrofu, samo sam razmišljao kako je to to – Jane će me izbaciti iz učionice i to će biti kraj naše kratke, ali senzacionalno bijedne suradnje.

Nakon otprilike 25 minuta Jane je promijenila brzinu i usmjerila učenike na drukčiju aktivnost, a zatim mi je prišla i rekla: „Dajte mi još jedan.” Bio sam i šokiran i zadivljen. U Jane se krilo više nego što se činilo na prvi pogled. Tako sam joj dao drugi zadatak, a sljedeće sam se jutro vratio u svoju klupu gledati kako Jane ponovno pokušava – s istim učenicima, ali novim problemom.

Ovaj je put prošlo još gore. Učenici su odustajali još brže, a Jane je sada više vremena provodila ohrabrujući ih, a manje pomažući im. Na kraju mi je prišla i rekla: „Dajte mi još jedan.” Ova je žena bogme bila borbena. Tijekom posljednjih osamnaest godina radio sam sa stotinama učitelja, a dotad nisam susreo učitelja s tolikom odvažnošću – takvom voljom i odlučnošću da nastavi dalje unatoč potpunom neuspjehu. Tako sam dao Jane i treći zadatak, a sljedeće sam se jutro ponovno vratio u svoju klupu – s istim učenicima, ali novim problemom.

Ovaj je put bilo najgore. U učenicima više nije ostalo nikakve snage za borbu i 25 minuta samo su sjedili, ne rješavajući zadatak, i međusobno razgovarali. Međutim, u Jane je snage za borbu itekako još bilo. Ona se svih 25 minuta neprestano kretala po prostoriji i pokušavala nešto pokrenuti. Kada mi je na kraju prišla, rekla je: „Mislim da smo završili.”

Složio sam se. Svi u učionici bili su na mukama. Učenici su bili frustrirani. Jane je bila iscrpljena. A ja sam bio razočaran. Trebalo je odustati. No želio sam razumjeti zašto su zadatci koje sam prethodno uspješno koristio ovaj put tako podbacili. Stoga sam pitao Jane mogu li ostati do kraja dana i promatrati je kako poučava. Pristala je i dodala: „Znate pravila.”

Ispostavilo se da sam tri puna dana sjedio u Janeinoj učionici gledajući je kako poučava koristeći svoju spomenutu rutinu pregledavanja domaće zadaće, predavanja, pisanja bilježaka, rješavanja zadataka tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan i zadavanja domaće zadaće. Ponekad je poučavala iste učenike s kojima je pokušavala rješavanje problema. Ponekad je poučavala druge učenike. Pred kraj trećeg dana doživio sam dva prosvjetljenja. Prvo je bila spoznaja da ni u jednom trenutku u ta tri dana nisam primijetio da Janeini učenici promišljaju – barem ne na onaj način na koji znamo da učenici trebaju promišljati kako bi nastavili biti uspješni u matematici u idućim razredima. To ne znači da nisu bili uključeni ni u kakve aktivnosti. Naprotiv, aktivnosti je bilo pregršt – učenici su bili zauzeti od početka do kraja sata. Pisali su bilješke, odgovarali na pitanja, ispunjavali radne listove i počeli rješavati domaću zadaću. Bili su zaposleni. Ali jednostavno nisu promišljali.

Drugo prosvjetljenje koje sam doživio bila je iznenadna spoznaja da je Jane planirala svoju nastavu pod pretpostavkom da učenici ili ne mogu ili ne žele promišljati. Jane se nalazila u teškoj poziciji – imala je prostori-ju punu učenika koji nisu promišljali, a istodobno je imala kurikulum koji je morala proći i standarde koje je morala zadovoljiti. Ništa neuobičajeno. Svakodnevno se učitelji diljem svijeta nalaze u istoj situaciji. Čak se i učitelji koji, prema tradicionalnim mjerilima, slove kao dobri učitelji – koji izvrsno poznaju gradivo, brinu se o svojim učenicima i nastoje učiniti najbolje za njih – suočavaju s ovom dvojnom. Jane je slovila, u svojoj školi i cijelom okrugu, kao vrlo dobra učiteljica – njezini su učenici postizali dobre rezultate na testovima i činilo se da se ni jedan učenik nije „provlačio”. Jane je željela dati sve od sebe za svoje učenike i bila je spremna naporno raditi da to postigne. Pa ipak, Jane je bila upravo u spomenutoj dilemi. I što je učinila? Ono što mnogi od nas čine – strukturirala je aktivnosti tako da joj omoguće kretanje gradivom što brže i učinkovite bez potrebe da njezini učenici promišljaju. Dat ću vam primjer.

Gledao sam kako Jane provodi aktivnost koja se ugrubo može opisati kao problem s čačkalicom. Učenici su trebali konstruirati niz kvadrata od čačkalica i zabilježiti koliko je čačkalica bilo potrebno za konstruiranje nizova različitih duljina. Iz tih su podataka učenici trebali ekstrapolirati i izračunati koliko bi čačkalica bilo potrebno za konstrukciju redaka duljine 10, 20 i 100, a zatim iskazati generalizaciju u nekom prealgebarskom formatu. To su izvrsne aktivnosti za promišljanje kada je učenicima omogućeno samostalno istraživati. U Janeinu je razredu, međutim, ta aktivnost bila skup uputa na radnom listiću koji je izvukla iz jednog od svojih izvora. Ova prekrasna aktivnost uzorkovanja, ekstrapolacije i generalizacije bila je svedena na oblik matematike *iz kuharice* koja je osiguravala da je svaki učenik završi u roku od dvadesetak minuta, ali zapravo nitko ništa ne promišlja. Naravno, takve su aktivnosti dopuštale učenicima da ne moraju promišljati, što je zauzvrat prisililo Jane da nastavi planirati nastavu pod pretpostavkom da učenici ili ne mogu ili ne žele promišljati. Ali kakav je izbor imala? Jane je bila zaglavljena u nekoj vrsti beskrajnog i začaranog kruga nepromišljanja. U tome je problem. Promišljanje je nužna prethodnica učenja, a ako učenici ne promišljaju, onda ni ne uče.

Promišljanje je nužna prethodnica učenja, a ako učenici ne promišljaju, onda ni ne uče.

Zanimalo me je li to isključivo Janein problem, stoga sam posjetio učionicu druge učiteljice u njezinoj školi. I vidio sam istu stvar. Onda sam posjetio još jednu – ponovno ista stvar. Ukupno sam u toj školi posjetio pet učiteljica i svagdje sam vidio istu stvar – učenike koji ne promišljaju i učiteljice koje planiraju nastavu pod pretpostavkom da učenici ili ne mogu ili ne žele promišljati. Dakle, bio je to problem škole.

Onda me zanimalo je li to isključivo problem ove škole pa sam se obratio obrazovnim djelatnicima koje sam poznao i zamolio ih da mi preporučite učitelje za koje su čuli da su dobri. Kontaktirao sam te učitelje i pitao ih mogu li doći promatrati ih kako poučavaju i kako njihovi učenici uče. Mnogi su od njih pristali. Tako sam posjetio različite učionice u različitim školama i raspitivao se za dobre učitelje. Pa sam tako skakutao iz učionice u učionicu, iz škole u školu posjećujući te dobre učitelje.

Budući da sam pratio niz dobrih učitelja, bilo je mnogo različitosti među školama koje sam posjetio. Bio sam u učionicama svih razreda, od predškole do 4. razreda srednje škole. Bio sam u okruženjima lošijeg i boljeg socioekonomskog statusa. Bio sam u učionicama francuskoga i engleskoga govornog područja. Bio sam u državnim i u privatnim školama. Sveukupno sam bio u 40 različitim učionicama u 40 različitim školama. I kamo sam god išao, nailazio sam na istu situaciju – učenike koji ne promišljaju i učitelje koji planiraju nastavu pod pretpostavkom da učenici ili ne mogu ili ne žele promišljati. I svi su oni, poput Jane, sloveli

Kamo sam god išao, nailazio sam na istu situaciju – učenike koji ne promišljaju i učitelje koji planiraju nastavu pod pretpostavkom da učenici ili ne mogu ili ne žele promišljati.

kao dobri učitelji – izvrsno su poznavali gradivo, brinuli su se o svojim učenicima i bilo im je stalo do toga da njihovi učenici prouče cjelokupno gradivo. I ponovno, poput Jane, svi ti učitelji bili su zaglavljani u istom beskrajnom i začaranom krugu nepromišljanja – imali su učenike koji nisu promišljali i imali su gradivo koje su morali obraditi. I oni su, poput Jane, koristili resurse i udžbenike koji su osmišljeni da im to olakšaju. To nije Janein problem. Nije ni problem Janeine škole. To je problem sustava (pogledajte Sliku u.2).



Slika u.2 Učenici ne promišljaju.

Izvori: Goldfaery/iStock.com i Courtney Hale/iStock.com

UČENICI NE PROMIŠLJAJU

U ovom ćete trenutku možda s odobravanjem gledati na moju izjavu da učenici nisu promišljali, i možda ćete kimati glavom shvaćajući da se isto događa u vašoj učionici, i možda ćete revno htjeti doći do poglavlja ove knjige koja govore o tome kako to promijeniti – kako stvoriti učionicu matematičkog promišljanja. Ako je to slučaj, onda možete preskočiti do sljedećeg odjeljka o institucionalnim normama. Međutim, ako želite malo više opisa onoga što podrazumijevam pod nepromišljanjem i koliko se nepromišljanja uistinu događalo u spomenutih 40 učionica, onda nastavite čitati.

Dok sam posjećivao tih 40 učionica i dolazio do spoznaje da sam posvuda promatrao učenike kako ne promišljaju, u stvarnosti sam imao *osjećaj* da učenici ne promišljaju. Nisam imao dobar način za kvalificiranje ili kvantificiranje onoga što sam vidio ili nisam vidio. Bio je to samo osjećaj. Ispostavio se točan, ali tada je to bio samo osjećaj.

Moj prvi pokušaj preciznijeg opisa viđenoga došao je kasnije u nizu istraživačkih projekata usmjerenih na takozvano ponašanje *studentinga*. *Studenting*, termin koji je skovao Fenstermacher (1986), analogan je poučavanju. Kao učitelji radimo brojne stvari koje mogu, ali i ne moraju, imati veze s olakšavanjem učenja učenicima. Vodimo računa o prisutnosti na satu, razrješavamo probleme ometanja na satu, prenosimo školske obavijesti, skupljamo privole, prikupljamo novac i, o da, također pomažemo učenicima usvojiti sadržaj kurikula i razviti određene vještine. Sve te aktivnosti spadaju pod krovni pojam poučavanja. Za Fenstermachera, *studenting* je analogija ovomu:

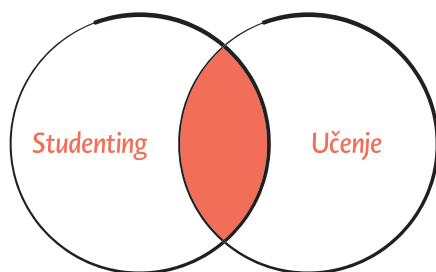
... *studenting* obuhvaća mnogo više od učenja kako učiti.

U okruženju škole *studenting* uključuje slaganje s učiteljima, odnos prema vršnjacima, suočavanje s roditeljima glede učeničkih obveza i hvatanje ukoštac s neakademske aspektima školskog života. (1986: 39)

[kao i] „psihičko izluđivanje” učitelja, smišljanje kako dobiti određene ocjene, „nadmudrivanje sustava”, skrivanje dosade da ne bude očita učiteljima, pregovaranje o najboljim uvjetima rješavanja zadataka čitanja i pisanja, pronalaženje pravih granica između nastavnih i izvannastavnih aktivnosti te predviđanje što će vjerojatno biti na testu, a što ne. (1994: 1)

Studenting je ono što učenici rade u okruženju za učenje – dio čega je i samo učenje.

U biti, *studenting* je ono što učenici rade u okruženju za učenje – dio čega je i samo učenje. Ali velik dio nije. Za mene je *studenting* bio savršen



način da počnem razmišljati o tome što učenici rade ako ne promišljaju. Stoga sam odlučio istraživati *studenting* unutar brojnih, kako ih nazivamo, *postavki aktivnosti* u učionici matematike. Postavka aktivnosti zasebna je i jasno definirana aktivnost unutar nastavnog sata. Postav-

ke aktivnosti koje sam prvo istražio bile su zadatci tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan, pisanje bilježaka i domaća zadaća. Predstaviti ću rezultate istraživanja o pisanju bilježaka i domaće zadaće u Poglavlju 7 odnosno Poglavlju 11. Ovdje ću predstaviti rezultate istraživanja *studentinga* kod zadataka tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan.

Učitelji traže od učenika da riješe zadatak tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan nakon što su im pokazali kako riješiti sličan zadatak. Tako, na primjer, možemo učenicima pokazati kako množiti dvoznamenkaste brojeve, a nakon što im to temeljito objasnimo i riješimo dva ili tri primjera, možemo se okrenuti učenicima i reći: „Sada vi pokušajte riješiti jedan.” i napisati na ploču zadatak koji želimo da pokušaju riješiti. I onda čekamo 4 minute i 22 sekunde, što je prosječno vrijeme koje učitelji daju učenicima za rješavanje zadatka tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan, prije nego što krenemo sami objašnjavati postupak rješavanja. Zatim, u mnogim slučajevima, učenicima zadajemo još jedan zadatak istog tipa. Pri mojim posjetima gore spomenutih 40 učionica zadatci tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan bili su temeljni i središnji dio svakog sata koji sam promatrao i, za mnoge od tih učitelja, bili su dio strukture onoga što znači poučavati.

Kada sam pitao učitelje da mi kažu kakvo ponašanje učenika očekuju u tim trenucima, odgovor je uvijek bio isti.

Lillian Očekujem vidjeti svoje učenike kako pokušavaju sami.

Istraživač U koju svrhu?

Lillian Kako bi provjerili znaju li sami riješiti zadatak i, ako ne znaju, kako bi učili iz vlastitih pogrešaka.

Od učenika očekujemo da pokušaju – i da uče iz pokušaja. Zadatci tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan vrsta su samoprocjene u kojoj učenici i učitelji saznaju jesu li pokazani primjeri rezultirali uspjehom. To je prilično jednostavno. Ali što učenici uistinu rade? Kakva su njihova ponašanja *studentinga* tijekom ovog zasebnog i jasno definiranog

okruženja za učenje? Pa... pokazalo se da se neki učenici ponašaju točno onako kako očekujemo od njih – ali samo njih oko 20 %. Ostali ne. U istraživanju o ponašanju *studentinga* u nekoliko različitih učionica otkrili smo niz ponašanja¹ tijekom postavki aktivnosti sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan (Liljedahl & Allan 2013.b). Provjerite prepoznajete li neke od njih.

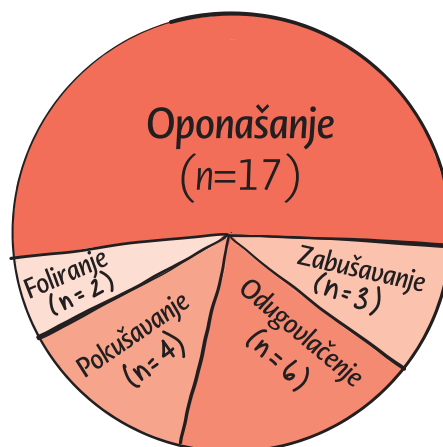
- 1. Zabušavanje** – Određeni broj učenika u svakom razredu uopće nije pokušao riješiti zadatak. Umjesto toga provodili su vrijeme gledajući u svoje pametne telefone, razgovarajući s drugim zabušantima ili doslovno ne radeći ništa. Kada smo razgovarali s njima, postalo je jasno da učenici koji su zabušavali ili nisu razumjeli što se događa ili ih nije bilo briga što se događa.
- 2. Odugovlačenje** – Kao i učenici koji su zabušavali, ni ovi učenici nisu pokušali riješiti zadatak. Međutim, za razliku od zabušanata, ovi su učenici ispunjavali vrijeme legitimnim ponašanjem nevezanim uz zadatak poput šiljenja olovke, pijenja vode, odlaska na zahod ili beskrajnog kopanja po ruksaku u potrazi za nekim ključnim komadom pribora. Kada smo razgovarali s njima, ti su nam učenici rekli da ili nisu znali kako riješiti zadatak ili su znali da će, ako samo pričekaju nekoliko minuta, učitelj proći postupak rješavanja zadatka.
- 3. Foliranje** – Neki su se učenici pretvarali da rješavaju zadatak, ali u stvarnosti nisu radili ništa. Foliranje je uključivalo studiozno gledanje u ploču, listanje stranica u udžbeniku, hinjenje da promišljaju i pretvaranje da nešto pišu u bilježnicu. No, unatoč njihovom mlaćenju prazne slame i glumljenju glume, ništa nisu postigli. Kao i odugovlačivači, ti su se učenici skrivali iza legitimnog učeničkog ponašanja. Razlika je bila u tome što se odugovlačivači skrivaju iza legitimnog ponašanja neusmjerenog na zadatak, dok se foliranti skrivaju iza legitimnog ponašanja usmjerenog na zadatak. Kada smo razgovarali s njima, saznali smo da, poput odugovlačivača, ti učenici ili nisu znali kako riješiti zadatak ili su samo ubijali vrijeme dok ga učitelj ne riješi.
- 4. Oponašanje** – Za razliku od učenika u trima navedenim skupinama, učenici koji su oponašali pokušavali su, a često i uspijevali, riješiti zadatak. Međutim, oni su pokušavali rekreirati uzorke rješenja koja su im netom bila pokazana na ploči. To je uključivalo stalno osvrtnje na pokazani primjer i preslikavanje retka po retka s primjera na ploči na zadani zadatak. Ako primjer

¹ Za detaljnu analizu psihologije koja stoji iza tih i drugih ponašanja *studentinga* pogledajte Allan (2017).

koji je učitelj pokazao nije odgovarao zadatku koji im je zadan, ti su učenici često skrenuli s pravog puta ili su potpuno zapeli. Kada smo razgovarali s učiteljima u čijim smo učionicama provodili istraživanje *studentinga*, svi su oni izjavili, naglašavajući, kako ne žele da njihovi učenici oponašaju. Ironično, 100 % učenika koji su oponašali izjavilo je da su mislili da je oponašanje ono što je njihov učitelj želio od njih. Pokazivanje analognog primjera prije zadataka tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan doživljavali su kao poziv na oponašanje.

5. Samostalno pokušavanje – Zadnje ponašanje učenika bilo je da jednostavno pokušaju sami. Ti su učenici spustili glave i jednostavno pokušali pronaći svoj put do rješenja zadatka na temelju vlastitog razumijevanja. Neki su od njih točno razumjeli, neki od njih krivo. Bez obzira na to, provjeravali su svoje razumijevanje i dobivali povratne informacije o tome – točno kako su učitelji i namjeravali.

Navedenih pet vrsta ponašanja *studentinga* bilo je prisutno pri svakom promatranju učenika u okruženju zadataka tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan. Distribucija broja učenika koji su pokazivali svako od tih ponašanja bila je iznenađujuće slična u svakoj od 10 učionica u kojima smo proveli istraživanje (pogledajte Sliku u.3). Sve u svemu, više je od polovice razreda oponašalo, dok je oko četvrtine razreda kombinirano zabušavalo, odugovlačilo i foliralo. Oni koji su pokušavali sami – što je učitelj želio – činili su samo oko 20 % učenika. Dakle, kada sam rekao da sam imao *osjećaj* da učenici ne promišljaju, ono što sam zapravo gledao bilo je zabušavanje, odugovlačenje, foliranje i oponašanje – ni jedno od čega nije promišljanje.



Slika u.3 Distribucija ponašanja *studentinga* u okruženju zadataka tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan.

Kada sam spojio podatke *studentinga* za zadatke tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan s podacima *studentinga* za vođenje bilježaka (Poglavlje 11) i domaću zadaću (Poglavlje 7), zajedno s podacima iz drugih postavki aktivnosti, pojavila se jasna slika koliko je točno nepromišljajuće ponašanje bilo prisutno unutar 60-minutnog školskog sata. Rezultati su bili zabrinjavajući. U tipičnom 60-minutnom satu 75 – 85 % učenika pokazivalo je nepromišljajuće ponašanje 100 % vremena. Ostali su učenici pokazivali nepromišljajuće ponašanje stalno osim 8-12 minuta cjelokupnog vremena. To su postali moji polazni podatci – osnova od koje sam se nadao da ću provesti poboljšanja.

INSTITUCIONALNE NORME

Na mom putovanju koje je buhvalo prvotnih 40 učionica u 40 različitim škola počeli su se pojavljivati drugi obrasci. Kamo sam god otišao, bez obzira na razinu razreda ili demografske značajke, učionice su izgledale više nalik jedna drugoj nego što su se razlikovale. I ono što se događalo u tim učionicama imalo je više sličnosti nego razlika. Naravno, bilo je razlika, ali većina onoga što sam vidio bilo je isto. Učionice su bile opremljene klupama ili stolovima, obično usmjerenim prema očigledno prednjem dijelu učionice. U tom prednjem dijelu nalazili su se učiteljev stol, neka vrsta okomite površine za pisanje (za učitelja) i neka vrsta okomite površine za projekciju. Učenici su sjedili, a učitelj je stajao. Učenici su pisali na vodoravnim površinama, a učitelj na okomitim. A nastavni su sati uglavnom imali jednak ritam – započinjali su nekom vrstom aktivnosti koju je vodio učitelj, poput predavanja ili pisanja bilježaka, možda su prelazili u neku vrstu rasprave u malim ili velikim skupinama, ali gotovo su uvijek kulminirali nekim oblikom individualnog rada. Čak i u nekoliko naprednijih učionica koje sam posjetio fizički je prostor izgledao isto i ritam nastave bio je isti. Razlikovali su se trajanje i priroda aktivnosti u sredini nastavnog sata.

Ove normativne strukture koje prožimaju učionice u Sjevernoj Americi i diljem svijeta toliko su robusne i toliko ukorijenjene da nadilaze ideju razrednih normi (Cobb, Wood & Yackel 1991, Yackel & Cobb 1996) i jedino se mogu opisati kao institucionalne norme (Liu & Liljedahl 2012) – norme koje su se proširile izvan učionice, čak izvan školske zgrade, i postale ugniježdene u samoj instituciji škole. Velik dio toga kako danas izgledaju učionice i velik dio toga što se u njima doga-

Velik dio toga kako danas izgledaju učionice i velik dio toga što se u njima događa vođen je tim institucionalnim normama, koje se nisu promijenile od početka modela javnog obrazovanja industrijskog doba.

da vođen je tim institucionalnim normama, koje se nisu promijenile od početka modela javnog obrazovanja industrijskog doba. Da, klupe sada izgledaju drukčije i prešli smo s crnih ploča na zelene ploče pa na bijele ploče pa na pametne ploče, ali učenici i dalje sjede, a učitelji i dalje stoje. Iako je bilo mnogo inovacija u praćenju postignuća, tehnologiji i pedagogiji, velik dio temeljne strukture škole ostao je nepromijenjen.

PREMA UČIONICI MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA

Gdje sam god bio, promatrao sam učenike koji ne promišljaju i, posljedično, učitelje koji moraju planirati nastavu pod pretpostavkom da učenici ili ne mogu ili ne žele promišljati. I gdje sam god bio, gledao sam učionice – kao i ono što se događalo u njima – koje su izgledale više nalik jedna drugoj nego što su se razlikovale. Stoga sam se počeo pitati postoji li nekakva veza između njih? Je li moguće da upravo institucionalne norme koje prožimaju sve škole i sve učionice zapravo omogućavaju i potiču nepromišljajuća ponašanja kojima sam svjedočio? Ako je tako, to bi značilo da bismo morali iz temelja promijeniti institucionalne norme da bismo učenike naveli na promišljanje.

Ta je pretpostavka postala temelj mog istraživanja i sljedećih sam petnaest godina radio s više od 400 osnovnoškolskih i srednjoškolskih učitelja pokušavajući shvatiti nepromišljajuća ponašanja učenika i navesti ih na promišljanje. Radili smo u skupinama od 8 do 18 učitelja u dvotjednim ciklusima kako bismo namjerno porušili institucionalne normativne strukture i provjerili može li to poboljšati promišljanje učenika. Naš je cilj bio jednostavan – pokušati povećati broj učenika koji promišljaju i pokušati povećati broj minuta tijekom kojih su učenici promišljali. Zapravo, htjeli smo poboljšati polazne podatke. I bili smo spremni prekršiti apsolutno sve razredne norme kako bismo to postigli. Naša jedina ograničenja odnosila su se na to da smo morali raditi unutar granica učionice i unutar granica postavljenog rasporeda školskog zvona. Izvan toga nije bilo norme koju nismo bili spremni izvrnuti.

Navest ću ekstreman primjer koliko smo daleko bili spremni ići; na početku istraživanja radio sam s osam učitelja koji su dva tjedna poučavali u učionicama u kojima nije bilo nikakvog namještaja. Namještaj je trajna institucionalna norma i htjeli smo vidjeti što će se dogoditi ako ga uklonimo. Iz tog sam eksperimenta otkrio tri stvari. Prvo, poboljšalo se promišljanje učenika – i to značajno. Imali smo više učenika koji su

promišljali i promišljali su dulje. Međutim, unatoč pozitivnom rezultatu, također sam otkrio da učitelji ne vole predavati u učionicama bez namještaja. Ta je spoznaja bila važna i tvorila je strukturu velikog dijela mojih budućih istraživanja. Nema smisla istraživati praksu koju učitelji nisu voljni primijeniti – bez obzira na to koliko su rezultati pozitivni. To je ograničilo opseg onoga što smo bili voljni isprobati u učionicama. Ne znači da nismo bili voljni istraživati područja koja su bila izazovna, ali postojala su ograničenja onoga što je razumno.

Treća stvar koju sam otkrio jest to da često dobijemo rezultate prije objašnjenja. To je ostalo tako tijekom cijelog istraživanja, a vrijedi čak i danas. Otkriće što djeluje uvijek je prethodilo razumijevanju zašto to djeluje. Kao istraživaču koji je navikao započinjati teorijama i zatim ih testirati, za mene je ovo bilo novo i uzbudljivo područje. U slučaju učionica bez namještaja, na primjer, bili su potrebni mjeseci razgovora s učenicima u različitim kontekstima prije nego što sam uopće počeo shvaćati zašto je izostanak namještaja utjecao na promišljanje učenika. Ispostavilo se: kada uđu u učionicu koja izgleda kao svaka druga učionica u koju ulaze, učenici pretpostavljaju da će sat izgledati kao i svaki drugi sat na kojem su bili. Stoga sve svoje navike i norme *studentinga* donose sa sobom u tu učionicu. Ako su te norme *studentinga* nepromišljajuća ponašanja, onda oni neće promišljati ni na ovom satu. Međutim, kada učenici uđu u prostoriju koja izgleda potpuno drukčije, tada svoje navike i norme ostavljaju pred vratima i dopuštaju si biti drukčiji – barem za početak. Dakle, poučavanje u učionicama bez namještaja utjecalo je na promišljanje učenika ne zato što je to samo po sebi poticalo promišljanje, već zato što nije aktiviralo navike nepromišljanja. I to je učiteljima dalo priliku da se dogodi nešto drukčije. Vratit ću se ovoj ideji u Poglavlju 15.

Stoga smo se entuzijastično upustili u istraživanje i gotovo odmah počeli uočavati pozitivne promjene u promišljanju učenika. Učitelji su izvještavali o velikim uspjesima, a kada bih posjećivao učionice i prikupljao podatke, vidio sam ogromna poboljšanja u promišljanju učenika. U svemu tome, međutim, izgubili smo iz vida koje su promjene imale kakav učinak. Pokušavali smo toliko stvari odjednom da smo izgubili kontrolu nad uzrokom i učinkom – pedagogijom i promišljanjem. Trebali smo biti sustavniji u eksperimentiranju. Trebali smo odabrati jednu varijablu kojom ćemo eksperimentirati dva tjedna i mjeriti učinke na promišljanje učenika pomoću te jedne varijable. Ali koje su bile varijable?

Očigledan izbor bio je popis postavki aktivnosti koje sam proučavao tijekom istraživanja *studentinga* – zadatci tipa sada-vi-pokušajte-riješiti-jedan, bilješke, pisanje domaće zadaće, pregledavanje domaće zadaće, rad u skupinama itd. Ali popis onoga što utječe na promišljanje u učionici

daleko nadilazi takve zasebne aktivnosti u nastavnom satu. Primjerice, već sam spomenuo da utjecaj ima i to kako prostorija izgleda kada učenici uđu u nju. Isto tako utjecaj ima i način na koji postavljamo pitanja i odgovaramo na njih, vrste zadataka koje koristimo i tako dalje.

Nastojeći pronaći popis varijabli koje utječu na promišljanje u učionici, proveo sam nekoliko mjeseci posjećujući učionice u kojima u to vrijeme nisam provodio istraživanja. Tražio sam način da raščlanim nastavu na zasebne čimbenike, koji bi mogli djelovati kao varijabla u našoj potrazi za poboljšanjem promišljanja u učionici. Na kraju se složio popis od 14 takvih čimbenika.

1. Koje tipove zadataka koristimo
2. Kako formiramo suradničke skupine
3. Gdje učenici rade
4. Kako razmještamo namještaj
5. Kako odgovaramo na pitanja
6. Kada, gdje i kako zadajemo zadatke
7. Kako izgleda domaća zadaća
8. Kako potičemo autonomiju učenika
9. Kako koristimo hintove i nadogradnje
10. Kako konsolidiramo lekciju
11. Kako učenici vode bilješke
12. Kako bираmo vrednovati
13. Kako koristimo formativno praćenje
14. Kako ocjenjujemo

Popis je sveobuhvatan. Sve što mi kao učitelji činimo u učionici provedba je jednog od tih čimbenika, a način na koji provodimo svaki od tih čimbenika ono je što oblikuje našu nastavnu praksu – našu jedinstvenu nastavnu praksu.

Ti su čimbenici postali varijable s kojima smo sustavno eksperimentirali nastojeći poboljšati promišljanje u učionici. Ono što smo željeli pronaći, za svaki taj čimbenik, bile su prakse koje su dovodile do više promišljanja od institucionalno normativnih praksi koje sam bio promatrao. A među tim praksama tražili smo prakse koje su dovodile do najviše promišljanja – ono što smo na kraju nazvali *optimalnom praksom za poticanje promišljanja*. I pronašli smo ih. U početku sporo. Ali sve su se pojavile tijekom sljedećih petnaest godina.

Kako se pokazalo, prakse koje su dovodile do više promišljanja od institucionalnih normativnih praksi nije bilo teško pronaći. Normativne prakse bile su daleko od optimalnih te postoji mnogo načina da se svaki od ovih 14 čimbenika provede tako da potakne više promišljanja. U većini slučajeva započeli smo istraživanje provođenjem prakse koja je bila upravo suprotna normi – ako je norma zahtijevala da učenici sjede, sada su stajali; ako je norma tražila da odgovaramo na pitanja učenika, prestali smo odgovarati na njih i tako dalje. U nekim je slučajevima pristup oprečnosti proizveo optimalnu praksu, ali je u svim slučajevima proizveo praksu koja je polučila više promišljanja u odnosu na polazne podatke.

Skupine učitelja isprobavale su svaku od navedenih praksi dva tjedna. Ako bi određena praksa polučila dobre rezultate, doradili bismo je, a učitelji bi je nastavili primjenjivati. Ako bismo usput isprobali praksu koja je bila manje učinkovita od neke druge prakse, napustili bismo je i pokušali nešto drugo. I tako stalno. Na kraju, nakon brojnih ponavljanja, došli bismo do točke u kojoj bi sve promjene koje smo unijeli u praksu učinile tu praksu manje učinkovitom. U tom smo trenutku imali ono što sam nazvao *lokalnom optimalnom praksom* – bila je optimalna za tog određenog učitelja u tom određenom okruženju s tom određenom demografskom skupinom učenika. Iako su te prakse bile od interesa za nastavu općenito, često su bile isprepletene s aspektima učiteljeve osobnosti, navika i norma. A ja sam stvarno želio prakse koje bi bile učinkovite za bilo kojeg učitelja u bilo kojem okruženju.

Tako bih uzimao lokalne optimalne prakse i prenosio ih različitim učiteljima, u potpuno različitim okruženjima s različitim demografskim skupinama učenika, i promatrao kako su funkcionirale za njih. Zatim bismo pokrenuli dvotjedne cikluse ponavljanja među tim učiteljima, sve dok se

nije pojavila praksa koja je dovela do najviše promišljanja i koja je bila prenosiva među učiteljima, okruženjima i demografskim skupinama. Potom bih tu praksu dao novoj skupini učitelja da je koriste šest do osam tjedana kako bih provjerio ima li longitudinalnu čvrstoću i ne djeluje li samo zato što je učenicima novo. Ako bi prošla posljednju prepreku, tek tada bio sam spreman smatrati je *optimalnom praksom za poticanje promišljanja* unutar čimbenika s kojim smo eksperimentirali.

KAKO ČITATI OVU KNJIGU

U poglavljima koja slijede čitat ćete o svakoj od 14 optimalnih praksi za poticanje promišljanja proizašlih iz istraživanja svake od 14 navedenih varijabli. Svako poglavlje počinje kratkim opisom čimbenika kojim se to poglavlje bavi, zašto je on važan i što ćete u tom poglavlju naučiti. Slijedi istraživanje **problematike** koja se tiče institucionalnih normativnih praksi za čimbenik o kojem je riječ i **problema** s tim normativnim praksama.

Nakon uvodnih odjeljaka slijedi glavni dio poglavlja pod nazivom **Prema učionici matematičkog promišljanja** u kojem ćete saznati više o optimalnoj praksi za poticanje promišljanja i kako ta praksa općenito rješava neke od problema navedenih u uvodnim odjeljcima, zajedno s nekim razrednim ili demografski specifičnim smjernicama tamo gdje je situacija složenija. Ovo je također odjeljak u kojem ćete naići na mnogo konkretnih savjeta za provedbu praksi. U našem istraživanju na površinu je isplivalo mnogo onoga što sam nazvao *mikropotezi*. To su sitnice unutar svake prakse za koje smo utvrdili da poboljšavaju, pojednostavljuju ili olakšavaju provedbu optimalne prakse. Nazivaju se mikropotezi kao suprotnost *makropotezima* koji su optimalne prakse za poticanje promišljanja u svakom poglavlju. To ne znači da su manje važni. U mnogim slučajevima mikropotezi čine razliku između neometane i otežane provedbe prakse u vašoj učionici.

Neke od stvari koje ćete pročitati u odjeljcima **Problematika** i **Problem** u svakom poglavlju vjerojatno će vas uznemiriti jer se može dogoditi da čitate o problemima s praksama koje sami provodite. Možda će vas te ideje dovesti do preispitivanja vlastitih nastavnih praksi i možda ćete imati pitanja o njima. U isto vrijeme neke od rezultata o kojima ćete čitati u odjeljcima **Prema učionici matematičkog promišljanja** možda će vam biti teško zamisliti i možda ćete imati pitanja o njima ili o tome kako ih provesti u svojoj učionici. Zbog toga u svakom poglavlju slijedi odjeljak koji se zove **Često postavljana pitanja** s pitanjima za koja smatram da najčešće zanimaju učitelje.

Svako poglavlje završava sažetkom *makropoteza i mikropoteza* i nizom *pitanja o kojima biste trebali razmisliti*. Ta se pitanja mogu koristiti kao teme za raspravu ako ovu knjigu čitate kao dio profesionalne zajednice za učenje (engl. *professional learning community*, PLC), ako ste na metodičkom tečaju ili u partnerstvu s drugim učiteljem. Ako ovu knjigu čitate sami, ta pitanja također mogu poslužiti da vas potaknu na dublje razmišljanje o onome što ste pročitali u određenom poglavlju i kako će se to što ste pročitali prenijeti u vašu učionicu. Pojedina pitanja također su osmišljena da vam pomognu otkriti neka od implicitnih uvjerenja koja imate o poučavanju matematike, a koja bi mogla biti izvor preispitivanja ili nevjerice u ono što je izloženo u tom poglavlju.

Knjiga je napisana tako da je možete cijelu pročitati prije nego počnete stvarati vlastitu učionicu matematičkog promišljanja. Ako se knjigom odlučite baviti na takav način, tada ćete u Poglavlju 15 pronaći rezultate istraživanja o optimalnom slijedu uvođenja i praksama koje bi trebalo uvoditi zajedno. Ako želite stvarati vlastitu učionicu matematičkog promišljanja čitajući poglavlje po poglavlje, knjiga je također napisana da to omogućí. Ako se sadržajem odlučite baviti na takav način, predlažem da prvo pročitate poglavlja 1–3, a zatim zajednički primijenite sve tri optimalne prakse za poticanje promišljanja. Nakon toga svaku praksu možete uvoditi dok čitate o njoj. Kako bismo vam pomogli na tom putu, svako poglavlje završava odjeljkom *Isprobajte ovo* u kojem su ponuđeni određeni savjeti i trikovi, kao i zadatci za promišljanje koji vam mogu poslužiti kao pomoć za pokretanje te prakse u svojoj učionici.

To ne znači da svaku optimalnu praksu morate provoditi točno onako kako je navedeno u poglavlju. Prakse su okvir koji bi trebao íći ruku pod ruku s vašim trenutnim iskustvom u poučavanju. Sav vaš učiteljski znanat i dalje je važan i nužan kako biste omogućili da svaka od optimalnih praksi djeluje u vašoj učionici. Mikropotezi će vam pomoći u tome. I dok provodite svaku praksu unutar svog specifičnog okruženja i sa svojom specifičnom demografskom skupinom, otkrit ćete nove mikropoteze koji će vam omogućiti da svaku praksu učinite još boljom.

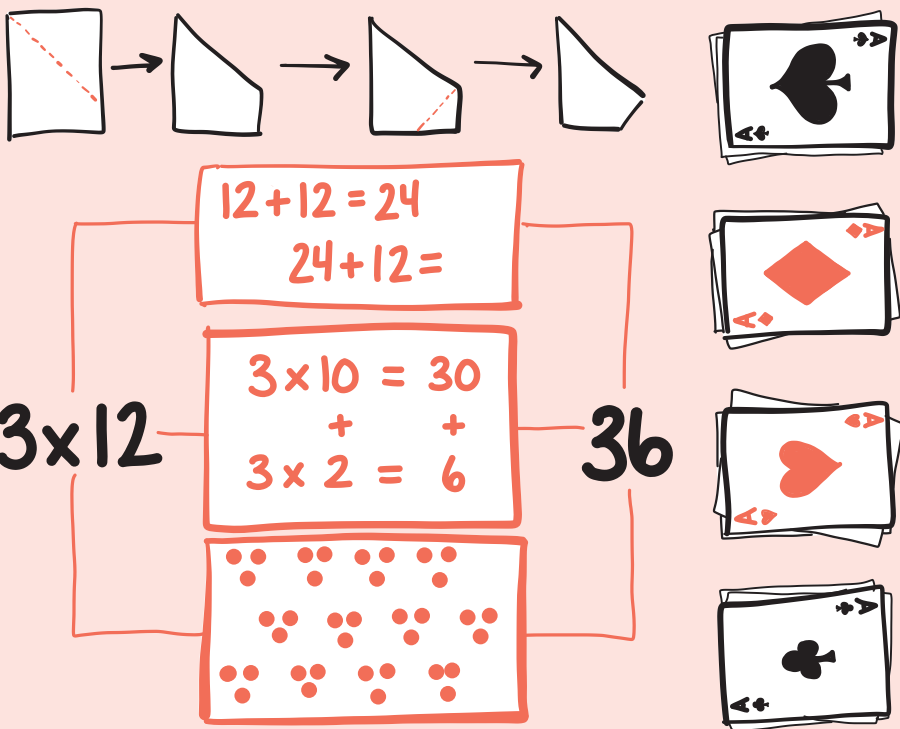
Uživajte u putovanju!



POGLAVLJE I

KOJE TIPOVE ZADATAKA KORISTIMO U UČIONICI
MATEMATIČKOG PROMIŠLJANJA

.....



Ako želimo da naši učenici promišljaju, moramo im dati nešto o čemu će promišljati – nešto što neće samo zahtijevati promišljanje, nego će ga i poticati. U matematici to nešto dolazi u obliku zadatka, a važno je imati *pravi* zadatak. Dakle, dok će se ostatak knjige baviti stvarima koje možemo učiniti u nastavnoj praksi kako bismo stvorili učionice matematičkog promišljanja, ovo će se poglavlje posebno osvrnuti na zadatke na temelju kojih se stvaraju učionice matematičkog promišljanja. Do kraja ovog poglavlja naučit ćete nešto o različitim tipovima zadataka koje možete koristiti za stvaranje učionice matematičkog promišljanja, gdje ih pronaći i kako osmisliti vlastite.

Ako želimo da naši učenici promišljaju, moramo im dati nešto o čemu će promišljati.



PROBLEMATIKA

Zadaci su inertni. Kako bi oživjeli, prijeko im je potrebna publika koja će ih rješavati. Upravo zato, kada razgovaram s učiteljima o tome što sačinjava dobar zadatak za stvaranje učionica matematičkog promišljanja, ne govorim o tome što zadatak traži, nego o tome što zadatak čini. A ono što zadatak treba učiniti jest potaknuti učenike na promišljanje. Razmotrimo, na primjer, sljedeći zadatak:

Što je veće: osam ili devet?

Možda mislite da to nije dobar zadatak. Da je postavljen učenicima 1. razreda srednje škole, bili biste u pravu. Oni su pogrešna publika za taj zadatak. Ali ako je to isto pitanje postavljeno četverogodišnjem djetetu, pokazalo bi se kao vrlo dobar zadatak. Strategije koje bi dijete trebalo upotrijebiti kako bi odgovorilo na pitanje složene su i nijansirane, a rješavanje bi zahtijevalo mnogo razmišljanja. Dakle, nije pitanje je li to dobar zadatak ili nije. Pitanje je: za što je dobar? A odgovor glasi da je dobar za poticanje učenika, kod kojih relativna kardinalnost i/ili položaj simbola brojeva još nisu rutinizirani, na promišljanje.

Kada govorimo o zadacima koji potiču učenike na promišljanje, najbolje je početi s rješavanjem problema. Od *Kako ću riješiti matematički zadatak* Georgea Pólye (1945) do *Principa i standarda Nacionalnog vijeća nastavnika matematike* (2000) literatura je prepuna potvrda dobiti bavljenja učenika rješavanjem problema. Iako postoje argumenti o tome koje točno postupke rješavanje problema uključuje i koje su točno kompetencije za to potrebne, postoji opće slaganje da je rješavanje

Rješavanje problema tip je zadatka kakav rješavamo kada ne znamo što točno trebamo učiniti.

problema tip zadatka kakav rješavamo kada ne znamo što točno trebamo činiti. Drugim riječima, rješavanje problema nije precizna primjena nekog poznatog nam postupka. Također nije ni primjena nekog naučenog algoritma. A nije ni glatko izvođenje formule. Rješavanje problema neuredan je, nelinearan i idiosinkratičan proces. Učenici će zaglaviti. Promišljat će. I odglavit će se. A kada to uspiju, naučit će – naučit će o matematici, naučit će o sebi i naučit će kako promišljati.

Dobri problemi zahtijevaju od učenika da zaglave, a zatim da promišljaju, eksperimentiraju, pokušavaju i dožive neuspjeh, potom da primijene svoje znanje na nove načine kako bi se odglavili.

Kao i kod dobrih zadataka za poticanje promišljanja, ono što čini dobar problem temelji se na tome što taj zadatak čini – ili bolje rečeno, što od učenika zahtijeva da naprave kako bi ga riješili. Dobri problemi zahtijevaju od učenika da zaglave, a zatim da promišljaju, eksperimentiraju, pokušavaju i dožive neuspjeh, potom da primijene svoje znanje na nove načine kako bi se odglavili. Problem *mačaka i štakora* u uvodu dobar je primjer takvog zadatka. Poznavanje razlomaka i omjera ovdje je nužno, ali daleko od dovoljnog, za rješavanje tog zadatka. Ipak, nije potrebno poznavanje nikakvog drugog sadržaja matematike. Da bismo riješili zadatak – da bismo se odglavili – moramo

razmišljati o problemu drukčije nego što obično razmišljamo o ekvivalentnim razlomcima ili zajedničkim omjerima. Moramo doći do spoznaje: ako šest mačaka ubije šest štakora u šest minuta, onda će ili šest mačaka ubiti jednog štakora u jednoj minuti ili će jedna mačka ubiti jednog štakora u šest minuta. Način na koji učenik dolazi do ove spoznaje jest rješavanje problema.



Zadaci rješavanja problema često se nazivaju *nerutinskim zadatcima* jer zahtijevaju od učenika da upotrijebe svoje znanje na načine koji nisu rutinizirani. Jednom kada se dogodi rutinizacija, učenici oponašaju umjesto da promišljaju ili – kako to Lithner (2008) naziva – oponašaju umjesto da su kreativni. Dobri zadaci rješavanja problema također su *bogati* zadaci jer od učenika zahtijevaju da koriste bogatu raznolikost matematičkog znanja i da to znanje spoje na različite načine kako bi riješili zadatak. Nazivaju se i bogatim zadatcima jer njihovo rješavanje dovodi do bavljenja bogatim i raznolikim presjekom matematike. Bez obzira na to kako ih se naziva, ono što zadatak čini dobrim zadatkom rješavanja problema nije ono što zadatak traži, već ono što čini. A takvi zadaci potiču učenike na promišljanje.

Moje rano istraživanje stvaranja učionice matematičkog promišljanja bilo je u velikoj mjeri usredotočeno na zadatke. Unatoč mojim iskustvima u Janeinu razredu i dalje sam vjerovao kako je najbolji način da uče-