

Gordana Paić  
Željko Bošnjak  
Boris Čulina  
Niko Grgić

# MATEMATIČKI IZAZOVI 8

RADNI UDŽBENIK SA ZADATCIMA ZA VJEŽBANJE IZ MATEMATIKE  
ZA **OSMI RAZRED OSNOVNE ŠKOLE**

**DRUGI DIO**

Udžbenik je namijenjen učenicima kojima je određen primjereni program osnovnog odgoja i obrazovanja.

2. izdanje



2024.



Nakladnik  
**ALFA d. d. Zagreb**  
**Nova Ves 23a**

Za nakladnika  
**Miro Petric**

Direktorica nakladništva  
**mr. sc. Daniela Novoselić**

Urednica za matematiku i fiziku  
**Tea Borković**

Izdanje priredila  
**Marija Draganjac**

Prilagodba  
**Željka Butorac, prof. logoped**

Recenzija  
**dr. sc. Željko Hanjš**  
**Mira Šobot**  
**Suzana Barnaki**  
**Mirela Bukač**

Lektura i korektura  
**Kristina Ferenčina**

Likovno i grafičko oblikovanje  
**Rajna Hranuelli**

Ilustracije  
**Antun Smajić**

Naslovnica  
**Igor Bojan Vilagoš**

Digitalno izdanje  
**Alfa d. d.**  
**Mozaik Education Ltd.**

Tehnička priprema  
**Rajna Hranuelli**  
**Alfa d. d.**

Tisak  
**Tiskara Zelina d. d.**

*Proizvedeno u Republici Hrvatskoj, EU*

Udžbenik je uvršten u Katalog odobrenih udžbenika za učenike s teškoćama u razvoju rješenjem Ministarstva znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske: **KLASA: UP/I-602-09/21-03/00301, URBROJ: 533-06-21-0002**, od **19. srpnja 2021. godine**.

CIP-zapis dostupan je u računalnome katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 001230067.

| OPSEG PAPIRNATOG IZDANJA | MASA PAPIRNATOG IZDANJA | KNJIŽNI FORMAT          |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 196 str.                 | 410 g                   | 265 mm (v) x 210 mm (š) |

Digitalno izdanje dostupno je na internetskoj adresi **hr.mozaweb.com** ili putem aplikacije **mozaBook** za pametne uređaje s operativnim sustavima Android i iOS.

©Alfa

**Ova knjiga, ni bilo koji njezin dio, ne smije se umnožavati ni na bilo koji način reproducirati bez nakladnikova pismenog dopuštenja.**

Mozaik Education Ltd. zadržava intelektualno vlasništvo i sva autorska prava za komercijalne nazive *mozaBook*, *mozaWeb* i *mozaLearn*, digitalne proizvode, sadržaje i usluge proizvedene neovisno o nakladniku Alfa d. d.

**Gordana Paić  
Željko Bošnjak  
Boris Čulina  
Niko Grgić**

# MATEMATIČKI IZAZOVI 8

RADNI UDŽBENIK SA ZADATCIMA ZA VJEŽBANJE IZ MATEMATIKE  
ZA **OSMI RAZRED OSNOVNE ŠKOLE**

**DRUGI DIO**

Udžbenik je namijenjen učenicima kojima je određen primjereni program osnovnog odgoja i obrazovanja.



Ne zaboravi priručnik za navigaciju.

PRRIJE POČETKA TREBALO BI ZNATI:

Kad otvoriš stranicu s novim poglavljem, **najprije pročitaj** što bi trebala/trebao znati **prije usvajanja** novoga gradiva u tom poglavlju. Zatim **pogledaj** što ćeš **ново** saznati u tom poglavlju.

U OVOM ČEŠ POGLAVLJU SAZNATI:

Pretpostavljamo da će tvoju pozornost privući **matematičke zgodice**. Neke od njih podsjetit će te da su se ljudi bavili matematikom u davno doba.



Pitagora se oduševio brojevima kad je otkrio da žice na harfi daju harmonične tonove baš onda kad su im omjeri duljina prirodni brojevi. Tvrdio je i da svako nebesko tijelo ima svoj ton. Kad su ga pitali kako to da ne čujemo te tonove, odgovorio je: Svi nebeski tonovi slijevaju se u najuzvišeniji zvuk, a to je tišina.



#### PRIMJER 1.

Novo gradivo upoznat ćeš na primjerima iz svakidašnjega života s kojima se i ti možeš susresti.



#### UPAMTI

U prozoru **Upamti u sažetom su obliku** iznesene činjenice i tvrdnje koje bi valjalo **zapamtiti**.



#### ZADATCI ZA VJEŽBU

Da bi postala/postao matematički sportaš, poslužit će ti raznoliki zadatci koje ćeš pronaći ispod podnaslova Zadaci za vježbu.

# SADRŽAJ

## SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI. JEDNADŽBA PRAVCA (2. dio).....9

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| Grafički prikaz linearne ovisnosti – ponovimo. Jednadžba pravca.....          | 10 |
| Jednadžba pravca.....                                                         | 15 |
| Jednadžba pravca određenoga dvjema točkama.....                               | 22 |
| Tok linearne ovisnosti .....                                                  | 26 |
| Međusobni položaji pravaca.....                                               | 31 |
| Priprema za ispit znanja – SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI. JEDNADŽBA PRAVCA..... | 36 |

## PITAGORIN POUČAK .....39

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| Mjerenje duljine i površine – ponovimo .....              | 40 |
| Pravokutni trokut – ponovimo.....                         | 42 |
| Pitagorin poučak.....                                     | 46 |
| Primjena Pitagorina poučka na pravokutni trokut.....      | 50 |
| Obrat Pitagorina poučka .....                             | 55 |
| Primjena Pitagorina poučka na pravokutnik.....            | 57 |
| Primjena Pitagorina poučka na kvadrat.....                | 61 |
| Primjena Pitagorina poučka na jednakokračni trokut.....   | 65 |
| Primjena Pitagorina poučka na jednakokranični trokut..... | 69 |
| Primjena Pitagorina poučka na romb.....                   | 73 |
| Primjena Pitagorina poučka na jednakokračni trapez.....   | 76 |
| Priprema za ispit znanja – PITAGORIN POUČAK .....         | 79 |

## GEOMETRIJA PROSTORA. PRIZME..... 83

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| Točke, pravci i ravnine u prostoru.....                                   | 84 |
| Međusobni položaji pravca i ravnine .....                                 | 88 |
| Međusobni položaji dvaju pravaca u prostoru.....                          | 90 |
| Međusobni položaji dviju ravnina u prostoru. Okomitost dviju ravnina..... | 93 |
| Prizma .....                                                              | 97 |

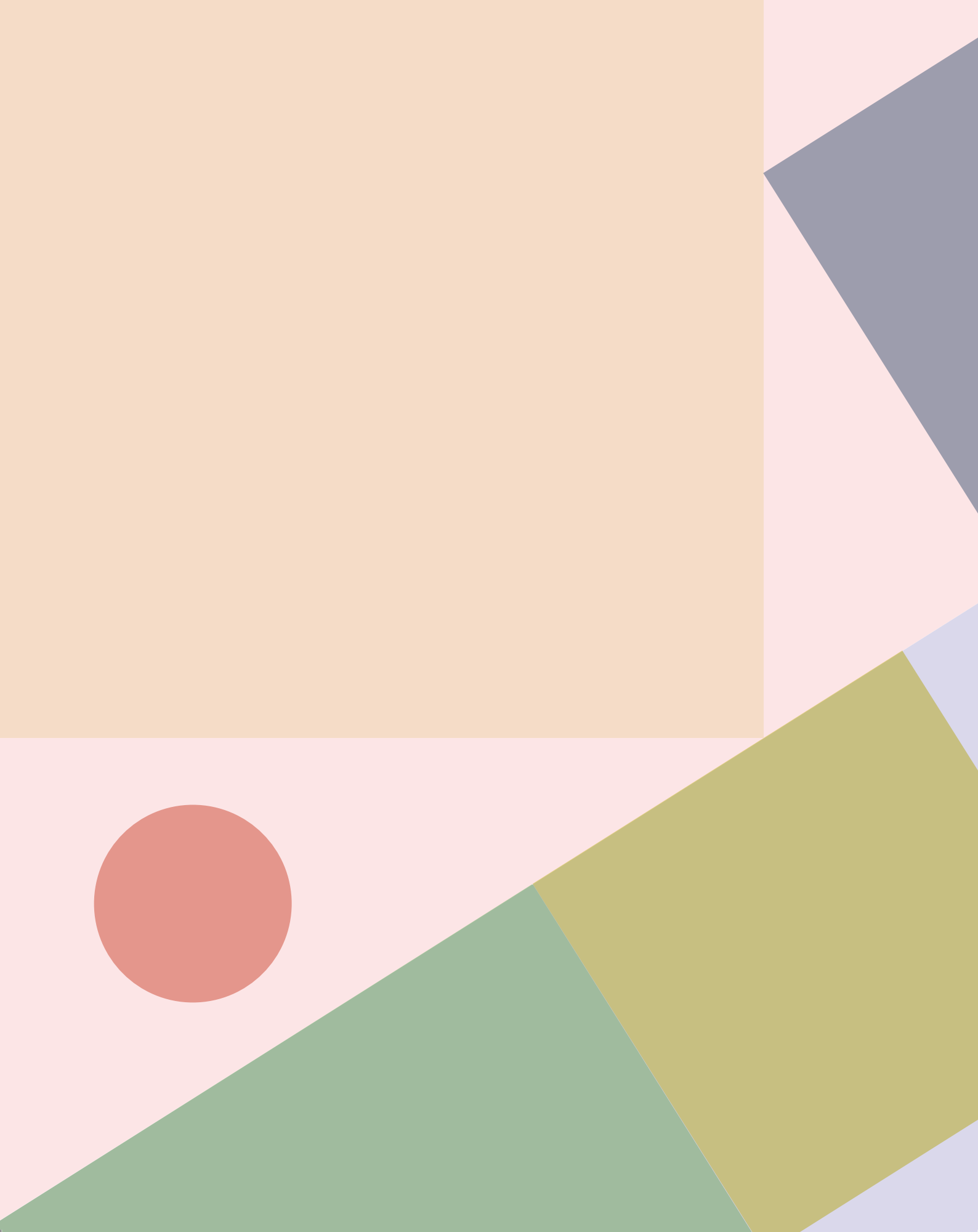
|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| Kocka.....                                                  | 103 |
| Oplošje kocke.....                                          | 109 |
| Mjerenje mase i volumena – ponovimo.....                    | 111 |
| Volumen kocke.....                                          | 114 |
| Kvadar.....                                                 | 118 |
| Oplošje kvadra.....                                         | 123 |
| Volumen kvadra.....                                         | 125 |
| Oplošje i volumen prizme.....                               | 128 |
| Pravilna četverostrana prizma (kvadratna prizma).....       | 132 |
| Priprema za ispit znanja – GEOMETRIJA PROSTORA. PRIZME..... | 136 |

## **PIRAMIDE I OBLA GEOMETRIJSKA TIJELA.....139**

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| Piramida.....                                                       | 140 |
| Oplošje i volumen piramide.....                                     | 144 |
| Pravilna četverostrana piramida.....                                | 148 |
| Valjak.....                                                         | 156 |
| Oplošje i volumen valjka.....                                       | 161 |
| Stožac.....                                                         | 166 |
| Oplošje i volumen stošca.....                                       | 170 |
| Priprema za ispit znanja – PIRAMIDE I OBLA GEOMETRIJSKA TIJELA..... | 175 |

## **ZAVRŠNO PONAVLJANJE ..... 179**

## **RJEŠENJA ZADATAKA.....185**





# SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI. JEDNADŽBA PRAVCA (2. dio)



## PRIJE POČETKA TREBALO BI ZNATI:

- rješavanje **linearnih jednadžbi** s jednom nepoznanicom
- **uređeni par**
- **linearnu ovisnost**.

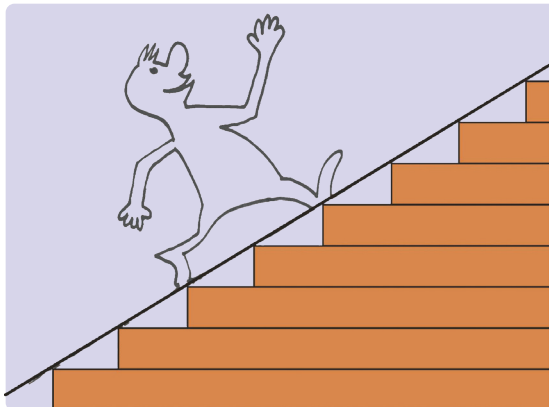


## U OVOM ĆEŠ POGLAVLJU SAZNATI:

- što su sustavi linearnih jednadžbi
- što znači riješiti sustav
- neke metode kojima možeš riješiti sustav
- kako provjeriti rješenje sustava
- što je **jednadžba pravca**
- kako tumačiti koeficijente jednadžbe pravca
- kako odrediti jednadžbu pravca određenoga dvjema točkama.

# Grafički prikaz linearne ovisnosti – ponovimo.

## Jednadžba pravca



Svojedobno je bio jako popularan crtić Linea. Bio je zanimljiv jer je autor uspio cijeli crtić nacrtati samo jednom linijom.

### ISHOD UČENJA:



#### B. 7. 4. i D. 8. 3.

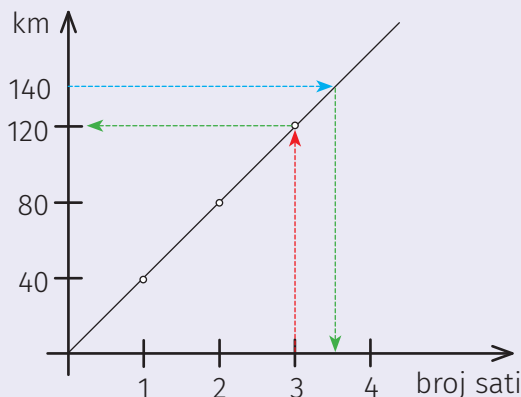
- moći ćeš grafički prikazati linearnu ovisnost
- moći ćeš crtati pravac zadan jednadžbom oblika  $y = ax + b$ , gdje su  $a$  i  $b$  racionalni brojevi, u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini



### PRIMJER 1.

Na poznatoj biciklističkoj utrci Tour de France svaki sudionik **u prosjeku za 1 sat** prijeđe **40 km**. Na crtežu je prikazano kako su se sudionici kretali u **jednom danu**. Očitajmo s grafa **koliko su kilometara prešli nakon 3 sata**. Koliko im je **sati** trebalo **za 140 km**?

Rješenje:



$$y = 40 \cdot x$$

S grafa očitavamo da su nakon **3** sata prešli **120** km.

Za **140** km trebalo im je **3 i pol** sata vožnje.



### UPAMTI

Graf linearne ovisnosti  $y = ax + b$  jest **skup svih točaka** s koordinatama  $(x, y)$ .

**Grafički prikaz** linearne ovisnosti jest **pravac** s jednadžbom  $y = ax + b$ .



### PRIMJER 2.

Nacrtajmo pravac: a)  $y = 3x - 2$ ,      b)  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .

Rješenje: a) Da bismo nacrtali pravac, potrebne su nam **točno dvije točke**. Zbog sigurnosti odredimo i treću točku toga pravca.



Po volji odaberemo vrijednosti za  $x$ , primjerice 0, 1 i -1. Skiciramo tablicu te izračunamo  $y$ .

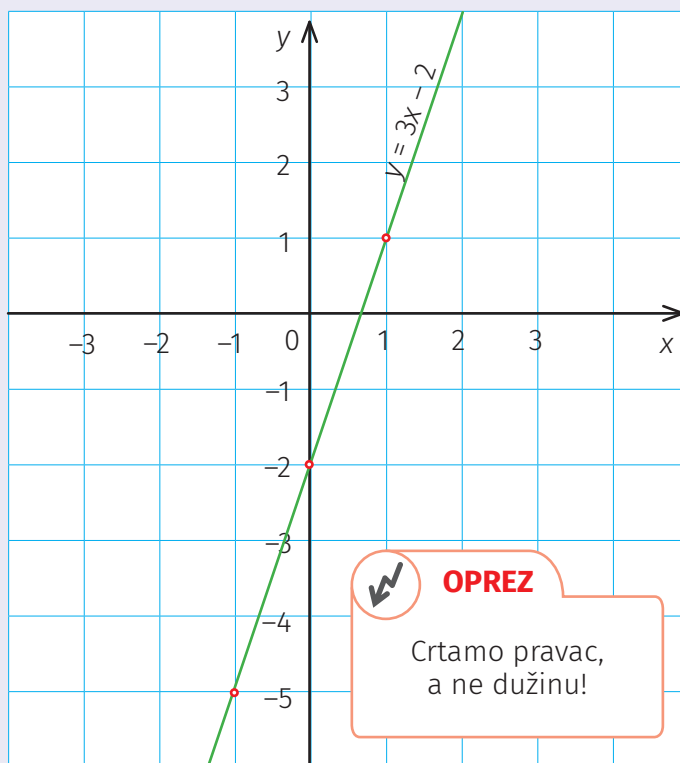
| $x$ | 0                    | 1                   | -1                      |
|-----|----------------------|---------------------|-------------------------|
| $y$ | -2                   | 1                   | -5                      |
|     | $3 \cdot 0 - 2 = -2$ | $3 \cdot 1 - 2 = 1$ | $3 \cdot (-1) - 2 = -5$ |



Ucrtajmo dobivene točke (0, -2), (1, 1) i (-1, -5) u koordinatni sustav.



Povučemo pravac kroz te točke.



## UPAMTI

Podatke iz numeričkih tablica (parove pridruženih vrijednosti) predočujemo **u koordinatnom sustavu**. Kad spojimo te točke, dobijemo pravac koji je **graf linearne ovisnosti**.



Napravimo **tablicu vrijednosti** za najmanje **dva**, po volji odabrana broja za  $x$ .

|     |                        |
|-----|------------------------|
| $x$ | izabrane vrijednosti   |
| $y$ | izračunate vrijednosti |



**Nacrtamo te točke** u koordinatnom sustavu.



**Povučemo kroz te točke** pravac čija je jednačba  **$y = ax + b$** . Dakle, grafički prikaz linearne ovisnosti  $y = ax + b$  u koordinatnoj ravnini jest **pravac s jednačbom  $y = ax + b$** .

$$b) y = -\frac{1}{2}x + 3$$

### Rješenje:

1. Napravimo tablicu.

| x  | y |
|----|---|
| -2 | 4 |
| 0  | 3 |
| 2  | 2 |

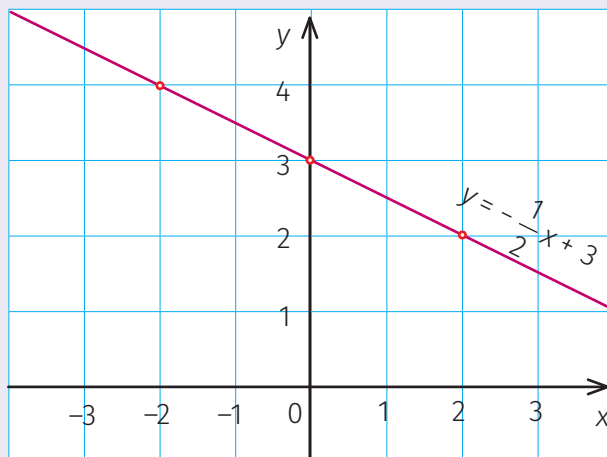
2. i 3. Ucrtamo te točke u koordinatni sustav i nacrtamo pravac.

Ne zaboravi na pravcu napisati njegovu jednadžbu.



### TRIK

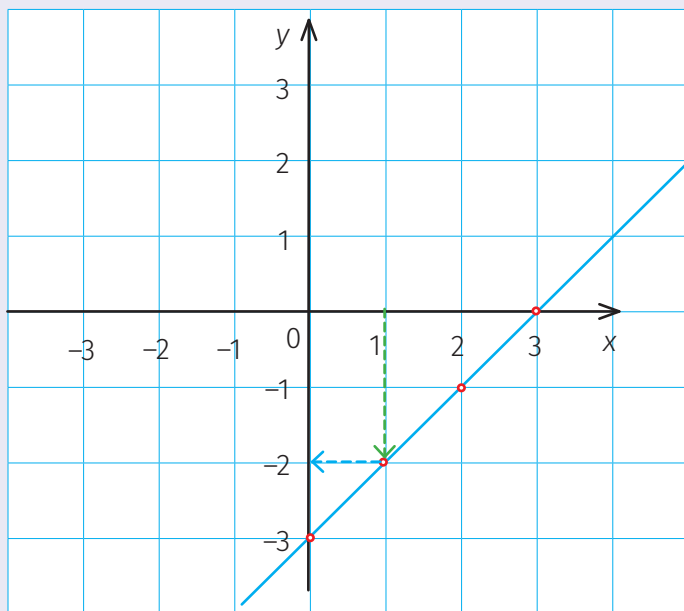
Ako je  $a$  razlomak, zgodno je za  $x$  izabrati broj djeljiv s nazivnikom toga razlomka jer će se pri računanju skratiti.



### PRIMJER 3.

Nacrtajmo graf linearne ovisnosti kojem **pripadaju točke (0, -3) i (2, -1)**.  
Potom **očitajmo s grafa** koji **broj** ta linearna ovisnost **pridružuje broju 1**.

### Rješenje:



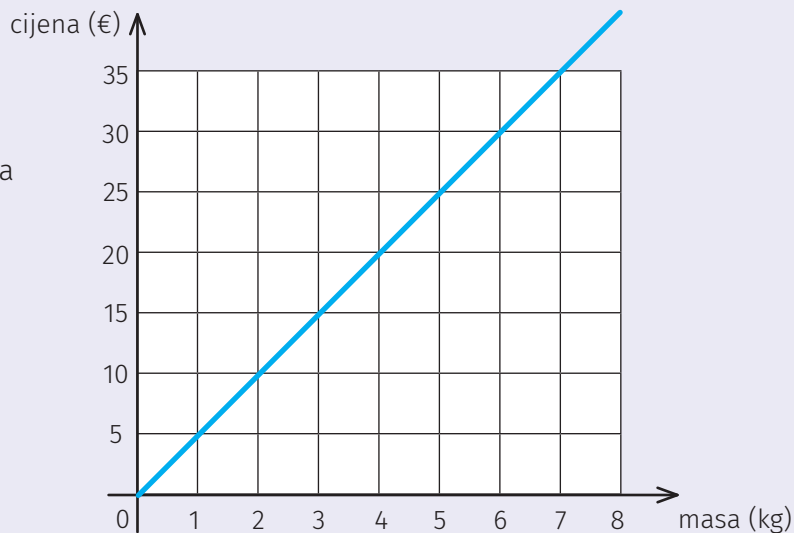
Broju 1 linearna ovisnost pridružuje broj -2.

Riječ linearna dolazi od latinske riječi linea, što znači crta, pravac, potez.

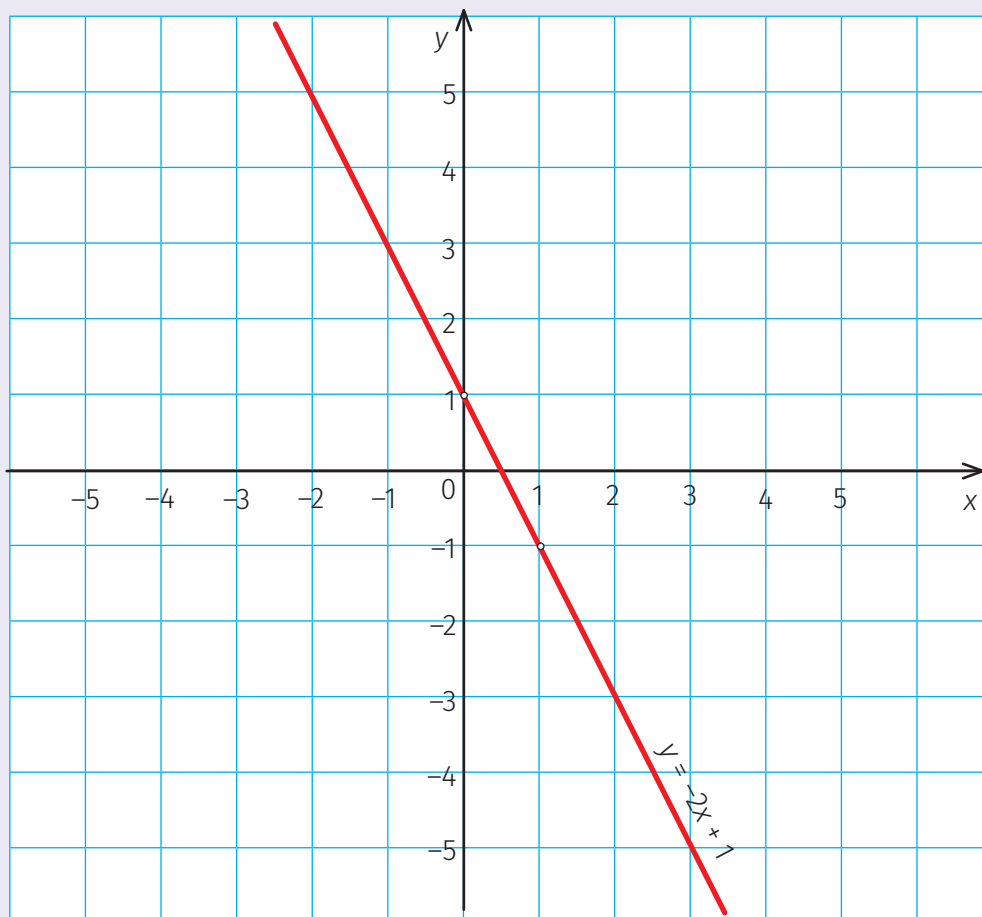


## ZADATCI ZA VJEŽBU

1. a) Očitaj **s grafa** koliko stoji **4** kilograma jagoda.  
b) Očitaj **s grafa** koliko se jagoda može kupiti za **35 €**?



2. U koordinatnoj ravnini **nacrtnan je graf** linearne ovisnosti.



Očitaj **s grafa** koju vrijednost **ta linearna ovisnost** pridružuje **nezavisnoj veličini x**:

- a) 0, \_\_\_   b) 1, \_\_\_   c) -1, \_\_\_   d) 2, \_\_\_   e) -2, \_\_\_   f) 3 \_\_\_.

3. Nacrtaj pravac: a)  $y = x$ ,

b)  $y = -x$ ,

c)  $y = x + 2$ ,

d)  $y = x - 2$ ,

e)  $y = -x + 2$ ,

f)  $y = -x - 2$ .

4. Nacrtaj pravac: a)  $y = 3x$ ,

b)  $y = -3x + 2$ ,

c)  $y = 3x - 1$ .

5. Nacrtaj pravac: a)  $y = \frac{1}{2}x$ ,

b)  $y = \frac{-1}{2}x + 1$ ,

c)  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .

6. Linearna ovisnost zadana je podacima iz sljedeće tablice.

| x | -2 | -1 | 0  | 1  | 2  |
|---|----|----|----|----|----|
| y | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 |

Nacrtaj graf te linearne ovisnosti.

7. Nacrtaj pravac  $y = \frac{1}{2}x - 3$ . Očitaj točku pravca čija je:

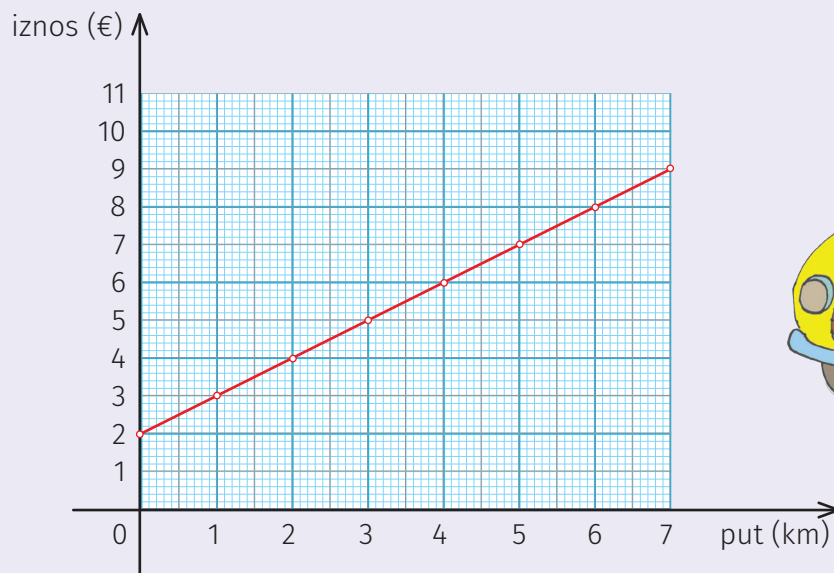
a) apscisa 2,

b) ordinata 0,

c) ordinata -3,

d) apscisa -4.

8. Ivan se vraćao iz kina. Vozio se taksijem. Tijekom vožnje proučio je cjenik i kod kuće nacrtao grafički prikaz ovisnosti **iznosa računa o prijeđenom putu**.

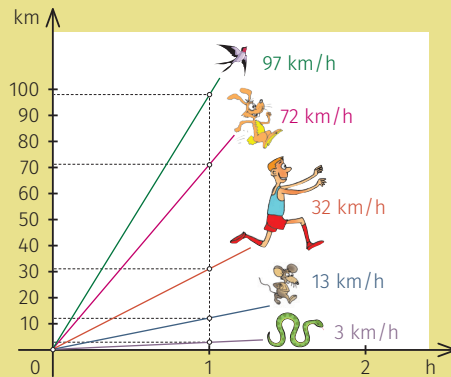


a) Koliko Ivan treba platiti da taksist **dođe po njega**?

b) Koliko je Ivan platio ako se **vozio 7 km**?

# Jednadžba pravca

Na sljedećem grafikonu polupravcima su prikazana jednolika gibanja raznih bića. Pokušaj povezati brzine njihovih gibanja s nagibima pravaca.



## KLJUČNI POJMOVI:

- nagib pravca
- odsječak na y-osi

## ISHOD UČENJA:



### D. 8. 3.

- moći ćeš provjeravati pripadnost točke pravcu
- moći ćeš čitati i tumačiti koeficijente jednadžbe pravca



## PRIMJER 1.

Odredimo točku  $R(x, 5)$  i točku  $T(-2, y)$  koje pripadaju pravcu  $y = x + 1$ .

**Rješenje:** U jednadžbu pravca  $y = x + 1$  umjesto slova  $y$  možemo pisati broj 5, ordinatu zadane točke  $R$ .

$$\begin{aligned}5 &= x + 1 \\x + 1 &= 5 \\x &= 5 - 1 \\x &= 4 \\R(4, 5)\end{aligned}$$

Odredimo i točku  $T(-2, y)$ .

U jednadžbu  $y = x + 1$  uvrštavamo za  $x$  broj  $-2$ .

$$\begin{aligned}y &= -2 + 1 \\y &= -1\end{aligned}$$

$$T(-2, -1)$$



## PRIMJER 2.

Nacrtajmo pravac zadan jednadžbom  $2x - 3y + 6 = 0$ .

**Rješenje:**

Preuredit ćemo zadanu jednadžbu. Želimo **na lijevoj** strani jednadžbe **imati  $y$  sam**.  
Prebacit ćemo **sve ostalo na desnu** stranu jednadžbe.

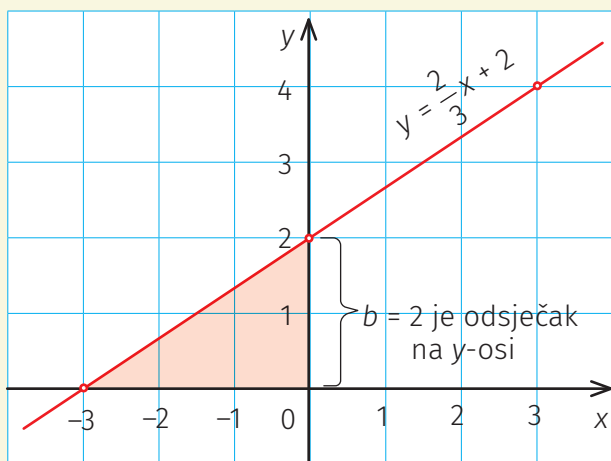
$$\begin{aligned}&\downarrow \quad \downarrow \\-3y &= -2x - 6 \quad / : (-3) \quad \text{Podijelit ćemo jednadžbu s } -3, \text{ jer nam još samo on smeta pored } y.\end{aligned}$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

Napravimo tablicu i nacrtajmo pravac.

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

| x  | y |
|----|---|
| -3 | 0 |
| 0  | 2 |
| 3  | 4 |



$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

koeficijent smjera =  $\frac{2}{3}$

odsječak na y-osi = 2



### UPAMTI

Ako je jednačba pravca napisana u obliku  **$y = ax + b$** , kaže se da je napisana u **eksplicitnom obliku**. Na **lijevoj** je strani **y**, a **svi** su ostali članovi na **desnoj** strani. Koeficijent **a** nazivamo **koeficijentom smjera** ili **nagibom**, a koeficijent **b** **odsječkom na y-osi**.



### PRIMJER 3.

Iz jednačbe pravca **ispišimo nagib pravca** i odredimo **odsječak na y-osi**.

$$-3y - 4x + 4 = 0$$

**Rješenje:** Sređivanjem jednačbe  $-3y - 4x + 4 = 0$  dobivamo:

$$-3y = 4x - 4 \quad / : (-3)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

Uočavamo parametre  $a = -\frac{4}{3}$  i  $b = \frac{4}{3}$ .

Nagib pravca jest  $a = -\frac{4}{3}$ , a broj  $b = \frac{4}{3}$  odsječak je na y-osi.



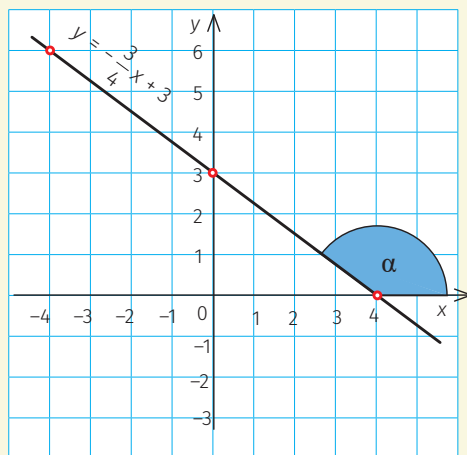
**PRIMJER 4.**

Kakav kut (šiljasti ili tupi) **zatvaraju pravci**  $y = -\frac{3}{4}x + 3$  i  $y = 3x - 4$  **s pozitivnim dijelom x-osi?**

**Rješenje:** Nacrtajmo zadane pravce.

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

| x  | y |
|----|---|
| -4 | 6 |
| 0  | 3 |
| 4  | 0 |

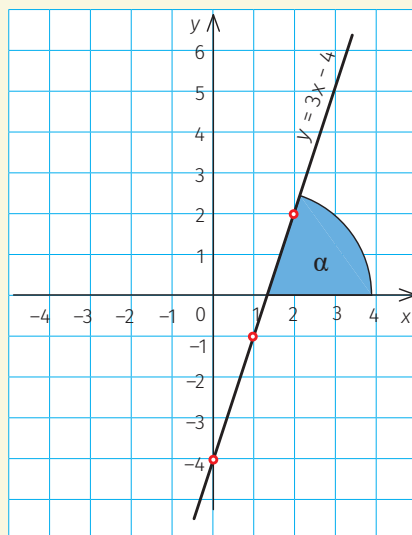


$$y = -\frac{3}{4}x + 3, a = -\frac{3}{4}$$

Ako je  $a < 0$ , pravac zatvara tupi kut s pozitivnim dijelom x-osi.

$$y = 3x - 4$$

| x | y  |
|---|----|
| 1 | -1 |
| 0 | -4 |
| 2 | 2  |



$$y = 3x - 4, a = 3$$

Ako je  $a > 0$ , kut je šiljasti.

**UPAMTI**

Ako je koeficijent smjera **pozitivan** ( $a > 0$ ), tada pravac  $y = ax + b$  **s pozitivnim dijelom x-osi** zatvara **šiljasti** kut. Ako je koeficijent smjera **negativan** ( $a < 0$ ), tada pravac  $y = ax + b$  **s pozitivnim dijelom x-osi** zatvara **tupi** kut.

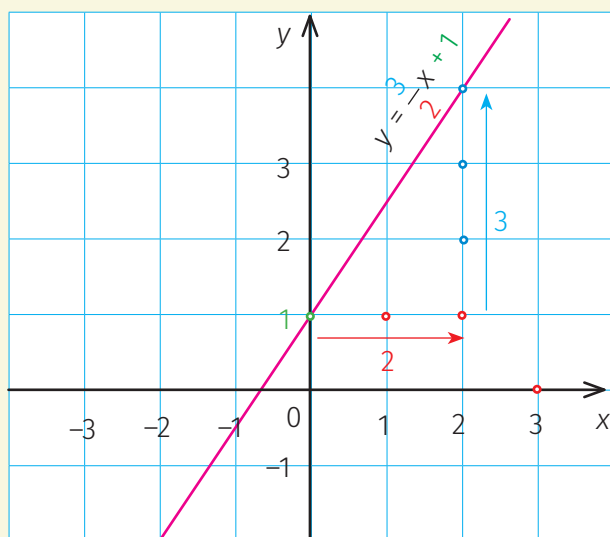
U sljedećem ćeš primjeru naučiti crtati pravac pomoću njegova nagiba.



### PRIMJER 5.

Nacrtajmo pravce: a)  $y = \frac{3}{2}x + 1$ , b)  $y = \frac{2}{3}x$ , c)  $y + 2x = 0$ , d)  $y + 2x - 3 = 0$ .

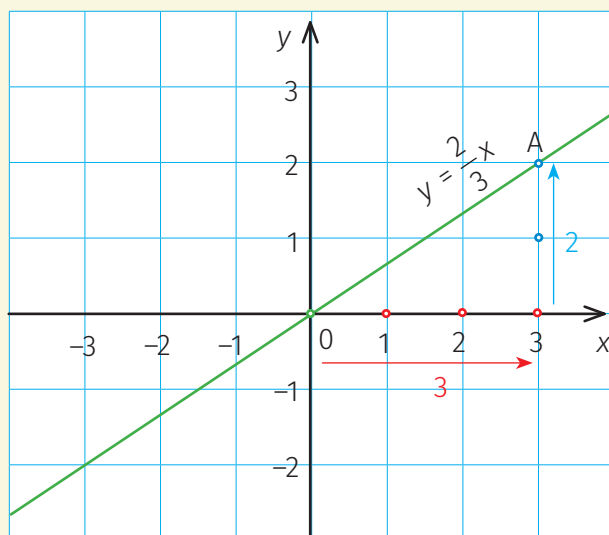
**Rješenje:** a)  $y = \frac{3}{2}x + 1$



$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

Ako je  $x = 0$ , onda je  $y = 1$  ( $y = b$ ). Ako je  $x = 2$ , onda je  $y = 4$ . Uočavamo da se povećanjem  $x$ -a za 2,  $y$  povećao za 3. Primijetimo da je  $a = \frac{3}{2}$ .

**Rješenje:** b)  $y = \frac{2}{3}x + 0$



1. Počinjemo od točke  $(0, b)$ .



2. Oblikujemo **pravokutni** trokut. Od točke  $(0, b)$  **krećemo se udesno** onoliko koraka (jediničnih dužina) koliko iznosi **nazivnik** koeficijenta smjera.



3. Od toga mjesta **krećemo uspravno** prema gore, ako je **brojnik** koeficijenta smjera **pozitivan**, ili **prema dolje** ako je **brojnik** koeficijenta smjera **negativan**.



4. Nacrtamo **pravac** kao produljenu **hipotenuzu** dobivenoga pravokutnog trokuta.



1. Nanesemo na  $x$ -os u pozitivnom smjeru **3** jedinice (**nazivnik** od koeficijenta  $a$ ).



2. Od toga mjesta uspravno, prema gore, nanesemo **2** jedinice (**brojnik** od koeficijenta  $a$ ). Dobili smo točku A.



3. Budući da pravac prolazi ishodištem, nacrtamo ga **ishodištem** i točkom A (**nazivnik**, **brojnik**).

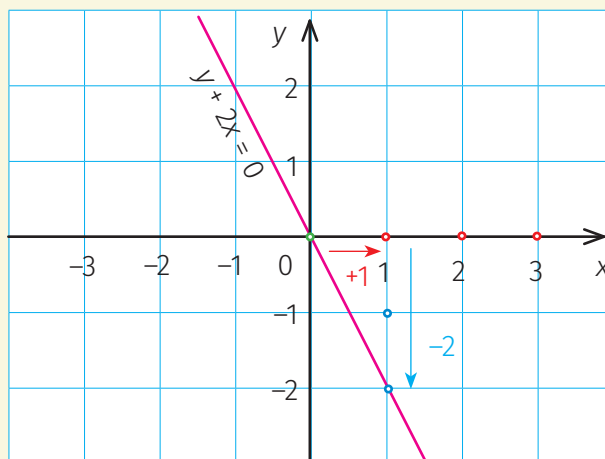
**Rješenje:** c)  $y + 2x = 0$   
 $y = -2x$

Pripremimo jednadžbu za brzo crtanje.

$$y = \frac{-2}{1}x + 0$$

+ 0 uvijek i bilo čemu možemo pribrojiti.

Svaki se cijeli broj može napisati kao razlomak s nazivnikom 1.

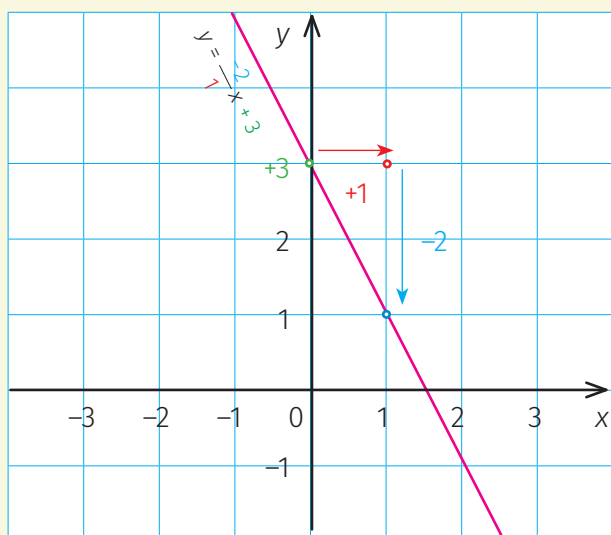


**Rješenje:** d)  $y + 2x - 3 = 0$

Izrazimo najprije jednadžbu u eksplicitnom obliku.  
 $y = -2x + 3$

Koeficijentu smjera dodat ćemo nazivnik jer nam je on važan za 2. korak crtanja.

$$y = \frac{-2}{1}x + 3$$



1. S obzirom na odsječak pravca na y-osi,  $b = 3$ , znamo jednu točku  $T(0, 3)$  i od nje počinjemo.
2. Po paraleli s x-osi iz točke  $T$  krećemo se udesno za onoliko jedinica koliki je nazivnik koeficijenta  $a$ , dakle za 1.
3. Od toga se mjesta krećemo uspravno prema dolje onoliko jedinica koliki je brojnik koeficijenta  $a$ , dakle za -2.
4. Nacrtamo pravac dobivenom točkom nakon 3. koraka i točkom  $T(0, 3)$ .



## ZADATCI ZA VJEŽBU

1. Nacrtaj pravac  $y = 2x - 3$ . Očitaj **točku pravca** čija je:

- a) apscisa 2,      b) ordinata 3,      c) ordinata -3,      d) apscisa -1.

Računski provjeri **pripadaju li** te točke pravcu  $y = 2x - 3$ .

2. Za **svaku** od navedenih točaka provjeri **pripada li** pravcu  $y = 2x - 1$ :

$A(-2, 1),$        $B(3, -2),$        $C\left(\frac{1}{2}, 0\right),$        $D(1, 1),$        $F(10, 19).$

3. Zaokruži **slovo** ispred **točnoga** odgovora. Točka  $T(-2, 2)$  **pripada** pravcu:

- a)  $y = -2x,$       b)  $y = x,$       c)  $y = 2x,$       d)  $y = -x.$

4. Odredi točku  $L(x, 3)$  koja **pripada** pravcu:

- a)  $y = -3x + 1,$       b)  $y = 2x + 5,$       c)  $y = -7x - 4.$

5. Odredi točku  $M(-2, y)$  koja **pripada** pravcu:

- a)  $y = 2x - 1,$       b)  $y = -3x + 5,$       c)  $y = \frac{1}{2}x + 3.$

6. Za svaki od navedenih pravaca u eksplicitnom obliku **ispiši koeficijent smjera i odsječak na**

- y-osi:** a)  $y = 3x - 7,$       b)  $y = -x + 10,$       c)  $y = -\frac{1}{2}x - 1,$       d)  $y = -\frac{4}{5}x + 0.1.$