

Jakov Labor · Jasmina Zelenko Paduan · Igor Vidović

FIZIKA u struci

MODUL 4

Osnove mehanike krutog tijela



MODUL 7

Titranja i valovi

Udžbenik za strukovne škole



I. izdanje | 2026.



Nakladnik
ALFA d. d. Zagreb
Nova Ves 23a

Za nakladnika
Ivan Petric

Direktorica nakladništva
mr. sc. Daniela Novoselić

Urednica za Matematiku i Fiziku
Tea Borković

Recenzija
doc. dr. sc. Mirko Marušić
Ivana Grabić Marin, prof. savjetnik
Željka Duh Blašković

Lektura i korektura
Kristina Ferenčina

Likovno i grafičko oblikovanje
Irena Lenard
Slaven Tomakić

Ilustracija
Igor Vilagoš
autori
Adobe Stock

Fotografija
Adobe Stock
autori

Digitalno izdanje
Alfa d. d.
Mozaik Education Ltd.

Tehnička priprema
Alfa d. d.

Tisak
Zelina d. d.

Proizvedeno u Republici Hrvatskoj, EU

OPSEG PAPIRNATOG IZDANJA	MASA PAPIRNATOG IZDANJA	KNJIŽNI FORMAT
220 str.	459 g	265 mm (v) x 210 mm (š)

Digitalno izdanje dostupno je na internetskoj adresi **hr.mozaweb.com** ili putem aplikacije **mozaBook** za pametne uređaje s operativnim sustavima Android i iOS.

© Alfa

Ova knjiga, ni bilo koji njezin dio, ne smije se umnožavati ni na bilo koji način reproducirati bez nakladnikova pismenog dopuštenja.

Mozaik Education Ltd. zadržava intelektualno vlasništvo i sva autorska prava za komercijalne nazive *mozaBook*, *mozaWeb*, digitalne proizvode, sadržaje i usluge proizvedene neovisno o nakladniku Alfa d. d.

Sadržaj

OSNOVE MEHANIKE KRUTOG TIJELA

PREDGOVOR	4
------------------------	---

1. Mehanika krutog tijela

Moment sile	7
Težište	14
Jednadžba rotacije	19
Kutna količina gibanja	27
Rad, snaga i kinetička energija pri rotaciji krutog tijela	32
Ravnoteža krutog tijela	42
Težište i ravnoteža	49
Test za samoprocjenu	56

TITRANJA I VALOVI

PREDGOVOR	60
------------------------	----

1. Mehaničko titranje

Hookeov zakon i elastična sila	63
Opis i energija titranja	67
Period i jednadžba elongacije harmonijskog titranja	76
Brzina i akceleracija pri harmonijskom titranju	83
Jednostavno njihalo	88
Prigušeno i prisilno titranje	95
Zadatci za vježbu 1	102
Test za samoprocjenu 1	104

2. Mehanički valovi

Nastanak i vrste valova	107
Brzina širenja vala i jednadžba harmonijskog vala	114
Refleksija i lom vala	121
Interferencija valova	128
Stojni val	135
Zvuk	142
Dopplerov učinak	153
Zadatci za vježbu 2	159
Test za samoprocjenu 2	161

3. Elektromagnetsko titranje i valovi

Elektromagnetsko titranje	165
Elektromagnetski val	173
Spektar elektromagnetskog zračenja	180
Zadatci za vježbu 3	192
Test za samoprocjenu 3	193

Odgovori na konceptualna pitanja i rješenja numeričkih zadataka	195
--	-----

Rješenja zadataka za vježbu	216
--	-----

Kazalo pojmova	218
-----------------------------	-----

PREDGOVOR

Pri opisivanju gibanja tijela često možemo zanemariti njegove dimenzije i zamisljati ga materijalnom točkom. Primjerice, opisujemo li gibanje Zemlje oko Sunca, Zemlju možemo smatrati materijalnom točkom. Međutim, dimenzije Zemlje ne možemo zanemariti želimo li opisati njezinu vrtnju oko vlastite osi. Ovdje ćemo razmatrati mirovanje i gibanje tijela koja pri djelovanju vanjskih sila ne mijenjaju oblik. Takva tijela zovemo krutim tijelima.

Gibanje krutog tijela može biti translacijsko i rotacijsko. Fizikalne veličine i izrazi kojima opisujemo rotaciju analogni su onima za translaciju. Tako je veličina analogna sili – moment sile, ona analogna brzini jest kutna brzina itd. Ako su veličine koje uzrokuju pokretanje krutog tijela jednake nuli, kažemo da je to tijelo **u ravnoteži**.

Sadržaj modula razvrstan je u sedam nastavnih jedinica. Svaka počinje **problemskim pitanjem** iz svakodnevnog života ili tehnike. Slijedi jasan **teorijski dio** uz prijedloge **učeničkih pokusa**, stvarnih ili virtualnih, te **istraživačkih zadataka**. U odlomcima naziva „**Izbjegni pogrešku**” izdvojene su najčešće neznanstvene predrasude. Na kraju nastavne jedinice tipičan je **primjer s postupkom rješavanja**, iza kojeg su **pitanja** za razmišljanje te **zadatci** za vježbu i samoprocjenu. Izravna primjena u bilo kojoj od navedenih struka označena je ikonom „Primjena u struci”. **Mentalna mapa** na kraju modula omogućuje pregled cjeline iz ptičje perspektive. Iza mentalne mape slijedi **Test za samoprocjenu**.

Mnoga saznanja do kojih se došlo proučavanjem mehanike krutog tijela našla su praktičnu primjenu. Udžbenik je namijenjen učenicima tehničkih strukovnih škola. Učenici u prvom redu arhitektonskog i građevinskog sektora, kao i neki iz sektora temeljnih prirodnih znanosti, koriste ga u trećoj godini, a učenici iz strojarskih i kemijsko-ekoloških zanimanja koriste ga u sklopu izbornih modula u četvrtoj godini školovanja.

Autori

Ključni pojmovi:

moment sile, moment tromosti, kutna količina gibanja, kinetička energija rotacije, težište, ravnoteža.

Povezanost modula s međupredmetnim temama

MPT Učiti kako učiti

uku A.4/5.2. Primjena strategija učenja i rješavanje problema. Učenik se koristi različitim strategijama učenja i samostalno ih primjenjuje pri ostvarivanju ciljeva učenja i rješavanju problema u svim područjima učenja.

MPT Osobni i socijalni razvoj

osr A.4.2. Upravlja svojim emocijama i ponašanjem.

osr B.4.2. Suradnički uči i radi u timu.

MPT Poduzetništvo

pod C.4.1. Sudjeluje u projektu ili proizvodnji od ideje do realizacije.

MPT Zdravlje

zdr B.4.1.B Razvija tolerantan odnos prema drugima.

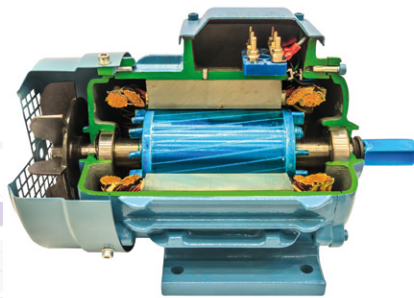
MPT Održivi razvoj

odr A.4.4. Prikuplja, analizira i vrednuje podatke o utjecaju gospodarstva, državne politike i svakodnevnje potrošnje građana na održivi razvoj.



1.

Mehanika krutog tijela



UVOD U SKUPINU ISHODA

Ako metalni obruč sa žbicama položimo vodoravno na glatku površinu i udarimo ga nogom, gibat će se. Ako je sila kojom smo pritom djelovali usmjerena prema središtu obruča, svaki će se njegov dio gibati jednako, i takvo gibanje zovemo translacija. Obruč ima translacijsku kinetičku energiju i količinu gibanja. Učvrstimo li ga u sredini i udarimo tako da pravac sile ne prolazi kroz tu točku, obruč će zbog **momenta sile** dobiti **kutnu akceleraciju** i početi **rotirati**, tim brže što mu je **moment tromosti** manji – što se manje opire rotaciji. Tada obruč ima **rotacijsku kinetičku energiju** i **zamac**. Na kraju, uravnotežimo obruč u vertikalnom položaju – tako da njegova težišnica prolazi kroz malu plohu kojom se obruč dodiruje s podlogom – i još ga jednom poguramo. Obruč će se zakotrljati: njegovo će **težište** translirati, a obruč će rotirati oko osi kroz težište. Njegova je ravnoteža **labilna**, pa će se ubrzo srušiti u vodoravni položaj. To ne želimo u građevini, tamo svaki element konstrukcije mora biti u **stabilnoj** ravnoteži.

Dovoljno jaka sila mogla bi deformirati obruč, ali pretpostavit ćemo da do toga ne dolazi. U tom je slučaju obruč **kruto tijelo**. Primjeri rotacije krutog tijela u svakodnevici i tehnici nalaze se posvuda. Da samo uđemo u stan, moramo zarotirati ključ u bravi, kvaku i vrata. U nebrojenim uređajima rotiraju bubnjevi, lopatice, oštrice, kotači, zupčanci, turbine, ventilatori, zamašnjaci... U ovom modulu steći ćete jasnu sliku o opisu, uzrocima i o primjenama rotacijskoga gibanja u svojoj struci.

Ishodi učenja

- iskazati jednadžbu gibanja za rotaciju
- iskazati zakon očuvanja kutne količine gibanja
- odrediti rad, snagu i kinetičku energiju za tijelo koje rotira
- opisati ravnotežu tijela

Moment sile

Vozeći bicikl (slika 1.1.), djevojčica djeluje silom na pedale i zakreće ih. Uz pretpostavku da djevojčica djeluje na pogonsku pedal silom stalnog iznosa usmjerenom prema dolje, u kojem je položaju spojnica pedala kada je zakretni učinak najveći: u horizontalnom, vertikalnom ili kosom? O kojoj još veličini ovisi zakretni učinak osim o sili?



Slika 1.1.

Kruto tijelo. Kada na čvrsto tijelo djeluju sile, one mu mogu promijeniti oblik, deformirati ga. Idealizirano čvrsto tijelo koje se ne bi moglo deformirati nazivamo **krutim tijelom**. Ako su deformacije čvrstih tijela pod utjecajem sila zanemarive, čvrsto tijelo možemo smatrati krutim.

Iako sile ne mogu promijeniti oblik čvrstog tijela, mogu mu promijeniti gibanje. Svako se gibanje krutog tijela može svesti na dvije vrste gibanja.

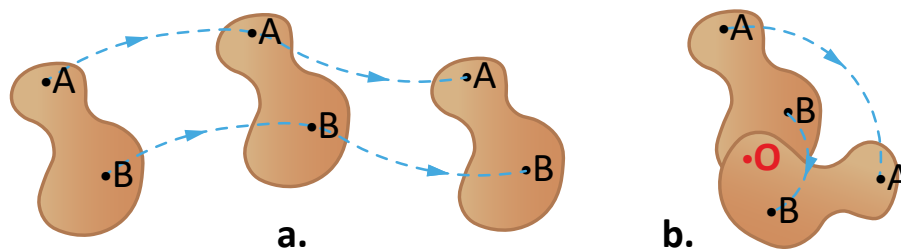
Translacija i rotacija. Kada se sve točke krutog tijela gibaju po jednakim putanjama (primjerice točke A i B na slici 1.2.a.), gibanje tijela zove se **translacijsko gibanje** ili **translacija**.

Ako se svi dijelovi tijela gibaju jednako, dimenzije tijela možemo zanemariti, a njegovo gibanje opisati kao gibanje točke, tzv. materijalne točke. Materijalna točka može izvoditi samo translacijsko gibanje.

Brzinu i akceleraciju pri translacijskom gibanju zovemo **linearnom brzinom** i **linearnom akceleracijom**.

Kruto tijelo može se gibati i na način prikazan na slici 1.2.b. To gibanje *ne* možemo opisati kao gibanje materijalne točke jer se točke tijela gibaju po različitim putanjama. Neke se točke i ne gibaju. Pravac na kojem leže te točke zove se **os rotacije (O)**, a samo gibanje **rotacijsko gibanje** ili **rotacija**.


Kruto tijelo može istodobno izvoditi translacijsko i rotacijsko gibanje.



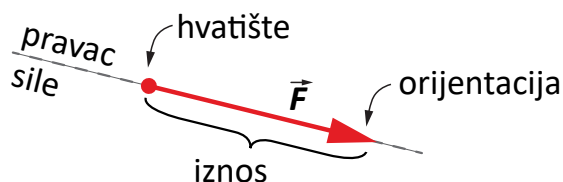
Slika 1.2. Translacija (a.) i rotacija (b.) krutog tijela

Izbjegni pogrešku!

 Translacija je pravocrtno gibanje.

 Translacija može biti po pravcu ili po krivulji. Jedini je uvjet da se sve točke gibaju po jednakim putanjama.

Translaciju tijela uzrokuje **sila**. Prisjetimo se pojmova koji opisuju vektor sile (**slika 1.3.**): iznos, orijentacija, hvatište (točka u kojoj sila djeluje na tijelo) i pravac sile (pravac na kojem leži vektor sile).



Slika 1.3. Opis vektora sile

Krak sile i moment sile. Uzrokuje li sila i rotaciju tijela? Ispitajmo to pokusom.

ISTRAŽIVAČKI ZADATAK – Uzrok rotacije krutog tijela

Cilj: utvrditi uzrok rotacije tijela i definirati odgovarajuću fizikalnu veličinu.

Pribor: kružna ploča s rupicama na magnetskom postolju, utezi na nitima.

1. DIO

Postupak: Ovjesiti uteg s hvatištem ispod osi O oko koje ploča može rotirati (**slika lijevo**), a zatim lijevo od osi (**slika desno**). Ponoviti pokus s utezima veće mase.

Pitanje: Izaziva li sila kojom uteg djeluje na tijelo rotaciju tijela? Ako izaziva, u kakvoj su vezi sila i učinak rotacije?

Opazanja: Ako pravac duž kojeg sila djeluje siječe os O, tijelo se neće zarotirati. No kad pravac sile ne siječe os O, sila ima rotacijski učinak koji se povećanjem sile povećava.

2. DIO

Postupak: Uz već postojeći uteg s hvatištem lijevo od osi dodati i drugi uteg jednake mase desno od osi (**slika**) tako da ploča ne rotira.

Pitanja:

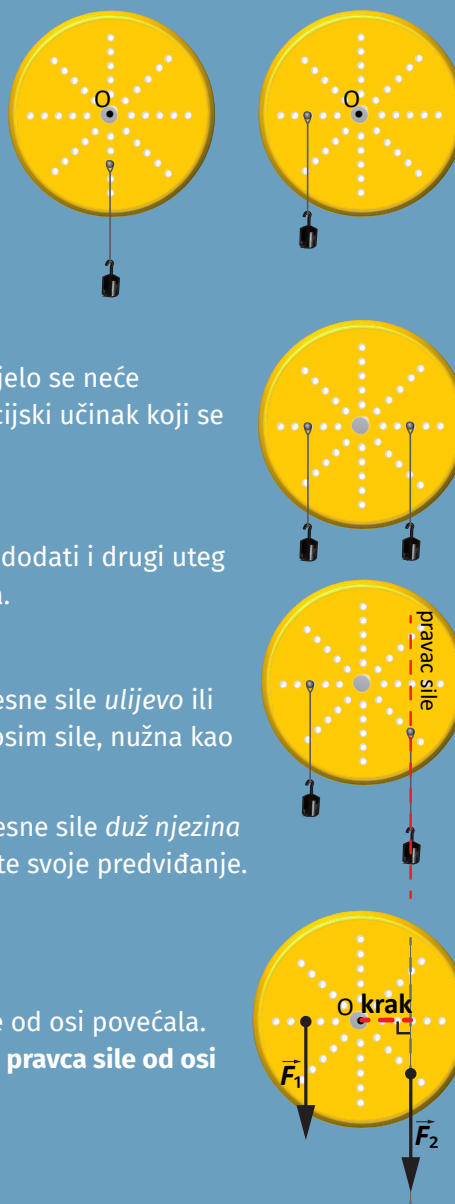
a. Hoće li se ploča pokrenuti ako premjestimo hvatište desne sile *ulijevo* ili *udesno*? Kako bi bilo razložno definirati veličinu koja je, osim sile, nužna kao uzrok rotacije?

b. Hoće li se ploča pokrenuti ako premjestimo hvatište desne sile *duž njezina pravca djelovanja* (**slika**)? Što sada predviđate? Obrazložite svoje predviđanje.

Opazanja:

a. Tijelo se pokrenulo.

b. Tijelo se *nije* pokrenulo iako se udaljenost hvatišta sile od osi povećala. No veličina koja je ostala nepromijenjena jest **udaljenost pravca sile od osi rotacije**. Ta se veličina zove **krak sile** (**slika**).



Uz istu silu i sve veći krak učinak rotacije sve je veći.

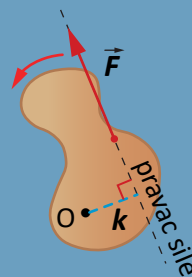
Zaključak:

Budući da su za rotaciju potrebni i sila i krak, uvodimo fizikalnu veličinu definiranu kao umnožak sile (F) i kraka (k) (slika 1.4.): Tu veličinu zovemo **moment sile** ili **zakretni moment** (M):

$$M = F k$$

Mjerna jedinica momenta sile jest N m.

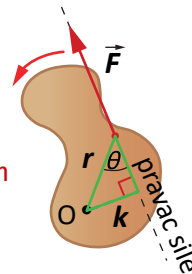
Slika 1.4. Za rotaciju su potrebni sila i krak.



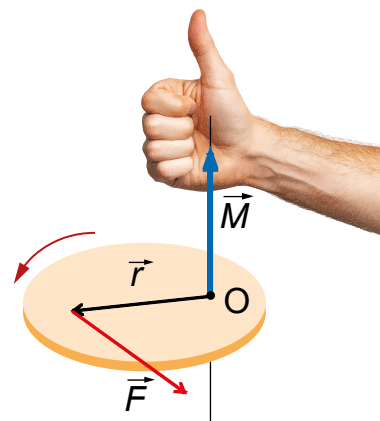
Izbjegni pogrešku!

Krak sile jest udaljenost hvatišta sile od osi rotacije.

Iz slike se vidi da udaljenost hvatišta od osi (r) i krak (k) nisu jednaki. Te su veličine stranice pravokutnog trokuta s kutom θ između r i F , pa vrijedi: $k = r \sin \theta$. Krak sile jednak je udaljenosti osi rotacije od hvatišta sile samo u posebnom slučaju, kada je $\theta = 90^\circ$.



Moment sile vektorska je veličina, a orijentaciju joj možemo odrediti desnom rukom. Ako prsti desne ruke pokazuju zakretanje, tada ispruženi palac, koji je okomit na ostale prste, pokazuje orijentaciju momenta sile (slika 1.5.). Na slici 1.4. moment sile orijentiran je iz ravnine crtnje.



Slika 1.5. Određivanje orijentacije momenta sile

U slučaju više (n) sila ukupni moment nalazimo vektorskim zbrajanjem pojedinih momenata:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n.$$

Imaju li momenti istu orijentaciju ili suprotne orijentacije, iznos ukupnog momenta jednak je algebarskom zbroju iznosa pojedinih momenata. Pritom se držimo dogovora da je pozitivan moment one sile zbog koje

bi se tijelo zakretalo suprotno od kazaljke na satu, a negativan one sile zbog koje bi se tijelo zakretalo kao kazaljka na satu.

Kada je ukupni moment svih sila na tijelo jednak nuli, jasno nam je da se tijelo neće zakrenuti.

Par sila. Parom sila zovemo dvije sile jednakih iznosa koje leže na dvama paralelnim pravcima i suprotnih su orijentacija (**slika 1.6.a.**). Momenti su sile iste orijentacije, zbog čega par sila zakreće tijelo. Izvedimo izraz za moment para sila.

Prema dogovoru pozitivni su momenti obiju sila, pa je ukupni moment para:

$$M = M_1 + M_2 = F_1x + F_2(d - x) = F_1x + F_2d - F_2x.$$

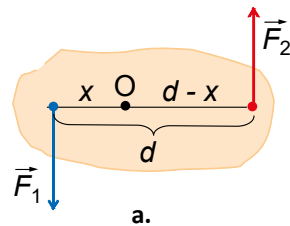
Budući da su sile jednakih iznosa ($F_1 = F_2 = F$), možemo pisati:

$$M = Fx + Fd - Fx$$

iz čega je moment para sila:

$$M = Fd.$$

Iznos momenta para sila jednak je umnošku iznosa jedne od sila i udaljenosti među pravcima duž kojih sile djeluju.



Slika 1.6. Par sila (**a.**) i zakretanje upravljača bicikla parom sila (**b.**)

Primjer 1: Kad sleti s litice, automobil zarotira. Zašto? Hoće li se pri većoj brzini slijetanja automobil zarotirati više ili manje nego pri manjoj brzini?

Odgovor: Kada prednji kotači automobila prijeđu preko ruba litice, moment sile teže zakreće automobil oko osi kroz dodirne točke zadnjih kotača s tlom. Zakretanje traje do trenutka kada preko ruba litice prijeđu zadnji kotači. Pri većoj će brzini automobila zakretno djelovanje momenta sile teže kraće trajati, zbog čega će se automobil zarotirati manje nego pri manjoj brzini slijetanja.

Primjer 2: Zašto se prednji dio automobila pri ubrzavanju diže, a pri kočenju spušta (slika)?



Odgovor: Cesta djeluje na gume silom trenja, a moment te sile uzrokuje zakretanje automobila oko težišta. Kada se automobil ubrzava prema naprijed, sila trenja usmjerena je prema naprijed i rotira prednji dio automobila prema gore. Kada automobil koči, sila trenja orijentirana je prema natrag, a njezin moment zakreće stražnji dio automobila prema gore i prednji prema dolje.



Primjer 3: Otvaramo vrata široka 1 m gurajući ih silom 10 N. Koliki je moment sile:

- ako je sila kojom djelujemo okomita na ravninu vrata
- ako sila kojom djelujemo zatvara kut 30° s ravninom vrata?

U obama slučajevima nacrtajte os rotacije i krak sile.

Rješenje:

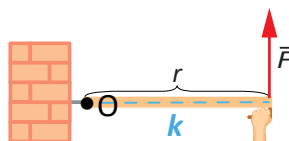
$$r = 1 \text{ m}$$

$$F = 10 \text{ N}$$

a. $k = r$ (slika)

$$M = F r = 10 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$$

$$M = 10 \text{ N m}$$

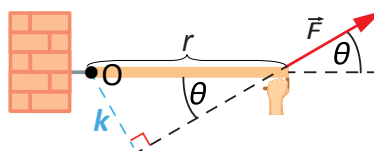


b. Iz pravokutnog trokuta (slika) slijedi:

$$k = r \sin \theta = 1 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 0,5 \text{ m}$$

$$M = F r = 10 \text{ N} \cdot 0,5 \text{ m}$$

$$M = 5 \text{ N m}$$

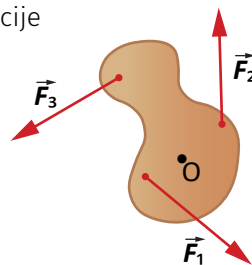


Konceptualna pitanja

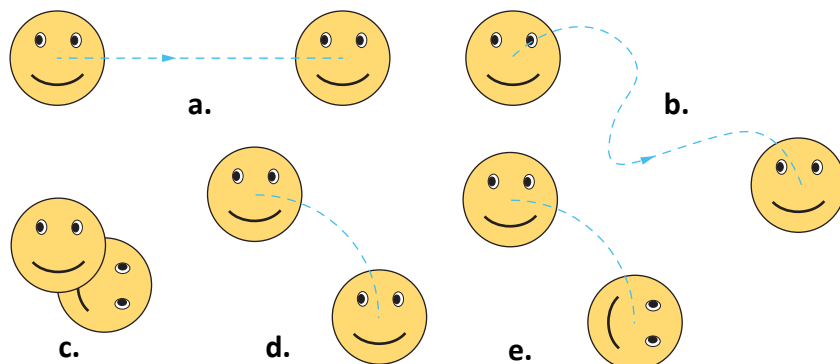
1. Povežite pojam i njegovu definiciju.

- | | |
|------------------|---|
| 1) translacija | a) umnožak sile i kraka |
| 2) rotacija | b) vrtnja oko osi |
| 3) os rotacije | c) udaljenost od osi do pravca sile |
| 4) hvatište sile | d) točka u kojoj sila djeluje na tijelo |
| 5) krak sile | e) točka (ili pravac) koja za vrijeme rotacije miruje |
| 6) moment sile | f) promjena položaja tijela bez rotacije |

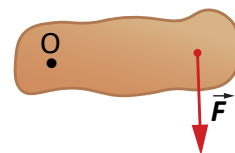
2. Nacrtajte pripadne krakove sila \vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3 prikazanih na **slici**.



3. Izvodi li „smajličić” na **slici** samo translaciju, samo rotaciju ili oboje?



4. Je li moment sile prikazane na **slici** orijentiran prema dolje, u ravninu papira ili iz ravnine papira?



5. Na ručku ključa za okretanje matice natakne cijev te na taj način produljimo ručku tri puta. Kako se pritom uz stalnu silu promijeni moment sile?

6. Rotirajuća vrata možemo gurati djelujući silom bliže njihovoj rubu i bliže njihovoj sredini. U kojem je slučaju lakše gurati vrata? Zašto?

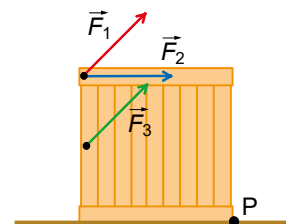
7. Vrata koja se nakon otvaranja automatski zatvaraju želimo umetanjem klina između vrata i poda držati otvorena. Treba li klin postaviti bliže šarkama ili dalje od njih?

8. U nekim motociklističkim utrkama vozači voze preko malih brda, a motocikli nakratko lebde. Ako motociklistički trkač drži gas dok odlazi s brda u zrak, prednji se dio motocikla podiže. Zašto se to događa?

9. Koliko iznosi rezultanta para sila?

10. Navedite primjer djelovanja para sila.

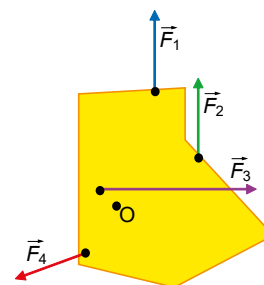
11. Na **slici** je prikazan sanduk i vektori triju sila (\vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3) kojima možemo djelovati na sanduk. Sile su jednakih iznosa, ali samo jednom od njih možemo prevrnuti sanduk oko točke P. Kojom?



12. Na **slici** je prikazan lik i vektori sila na njega.

a. Koja od sila ima najveći moment s obzirom na označenu os O?

b. Zbog kojih bi se sila lik okretao kao kazaljka na satu?



Numerički zadatci

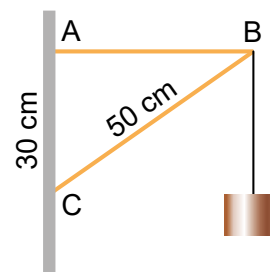
1. Vučno uže motora kosilice namotano je na bubanj polumjera 6 cm. Ako sila povlačenja užeta iznosi 75 N, koliki je moment sile na bubanj?

2. Moment ključ (**slika**) ima mjernu ljestvicu na kojoj se može očitati iznos momenta sile. Najveći moment sile koji može izmjeriti neki moment ključ iznosi 110 N m. Najmanja sila kojom mehaničar mora djelovati

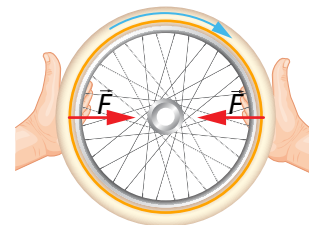
na ključ da bi proizveo taj moment iznosi 400 N. Uz pretpostavku da je širina mehaničarove šake 10 cm i da se hvatište sile nalazi na sredini šake, kolika je duljina ključa?



3. Da bi pritegnuo maticu moment ključem, mehaničar mora upotrijebiti moment sile od 22 N m. Duljina moment ključa iznosi 27 cm, a širina mehaničarove šake 10 cm. Kolikom najmanjom silom mehaničar mora djelovati na ključ uz pretpostavku da je hvatište sile na sredini šake?
4. Spojnica pedala na biciklu duga je 15,2 cm. Ako stopalo djeluje na pedalu silom od 111 N, koliki je moment sile kada spojnica s vertikalom zatvara kut: **a.** 30°, **b.** 90°, **c.** 180°?
5. Koliki je moment para sila pri zakretanju upravljača automobila ako je polumjer upravljača 17,5 cm, a sila svake ruke 3 N?
6. Njihalo nekog sata čini štap duljine 99,5 cm i homogeni disk mase 50 dag, pri čemu se središte diska nalazi na kraju štapa. Masa štapa zanemariva je. Koliki je moment sile na disk s obzirom na os zakretanja kada štap s vertikalom zatvara kut od 5°?
7. Teret mase 10 kg ovješeno je o spojište dvaju štapova kako prikazuje slika. Izračunajte moment sile teže na teret s obzirom na točku: **a.** A, **b.** B, **c.** C.



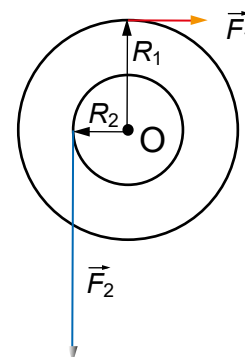
8. Za pritezanje matice mehaničar je upotrijebio ključ duljine 32,5 cm, pri čemu je na njegov kraj djelovao silom od 323 N. Kad mu je ključ zatrebao za pritezanje druge matice, nije ga mogao naći pa je upotrijebio drugi duljine 45 cm. Kolikom je sad silom mehaničar morao djelovati na kraj ključa da bi maticu pritegnuo jednako kao i prvu?
9. Da bismo zaustavili vrtnju kotača bicikla, pritišćemo na njega dvjema silama od po 10 N (**slika**). Dlanovi su međusobno udaljeni 64 cm, a faktor trenja između gume i dlana jest 0,75. Koliki je ukupni moment sila na kotač?



10. Nastojeći srušiti vertikalni stup visok 5 m, čovjek poteže konopac vezan za vrh stupa silom od 600 N. Pri kojem će najmanjem kutu između konopca i stupa čovjek srušiti stup ako je za rušenje potreban zakretni moment od 2 598 N m?



11. Tijelo na **slici** sastoji se od dvaju spojenih valjaka zajedničke uzdužne osi. Koliki je ukupni moment sila na tijelo ako je $F_1 = 5$ N i $F_2 = 15$ N, a $R_1 = 1$ m i $R_2 = 50$ cm? Vrti li se tijelo kao kazaljka na satu ili obratno ako je početno mirovalo?



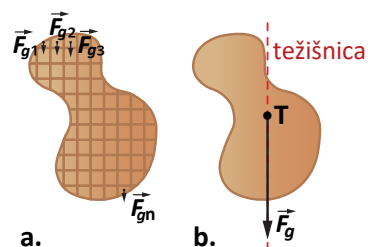
Težište

Dok akrobat izvodi salto (slika 2.1.), njegova se glava giba po putanji oblika petlje. Ima li putanja po kojoj se giba težište akrobata petlju?



Slika 2.1.

U mislima kruto tijelo možemo razdijeliti na djeliće (slika 2.2.a.). Zemlja na djeliće djeluje silama koje su na slici 2.2. označene \vec{F}_{g1} , \vec{F}_{g2} , \vec{F}_{g3} ... \vec{F}_{gn} . Rezultanta tih sila jest sila teža (\vec{F}_g) na tijelo. Točka u kojoj se nalazi hvatište sile teže zovemo **težištem (T)** tijela, a pravac na kojem leži vektor sile \vec{F}_g **težišnicom** (slika 2.2.b.).



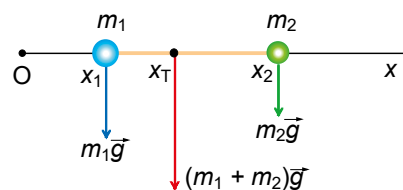
Slika 2.2. Težište i težišnica

U jednostavnom primjeru uzmimo da se tijelo sastoji od dviju kuglica s masama m_1 i m_2 . Kuglice su spojene štapom zanemarive mase položenim na x -os koordinatnog sustava tako da mu se jedan kraj nalazi u ishodištu (slika 2.3.). Sila teža na prvu kuglicu jest $m_1\vec{g}$, a na drugu $m_2\vec{g}$. Iznos je njihove rezultante (F_R):

$$F_R = m_1g + m_2g.$$

Momenti su tih sila s obzirom na os kroz ishodište:

$$M_1 = m_1gx_1 \text{ i } M_2 = m_2gx_2.$$



Slika 2.3. Uz izvod izraza za koordinate težišta

Rotacijski učinak resultantne sile mora biti jednak rotacijskom učinku sila $m_1\vec{g}$ i $m_2\vec{g}$, a to znači da je moment resultantne sile (M_R) s obzirom na os kroz ishodište jednak zbroju momenata M_1 i M_2 :

$$M_R = M_1 + M_2.$$

Prema slici 2.3. jest:

$$F_R x_T = m_1 g x_1 + m_2 g x_2$$

$$(m_1 g + m_2 g) x_T = m_1 g x_1 + m_2 g x_2$$

iz čega za koordinatu težišta dobivamo: $x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$.

Sastoji li se tijelo od više kuglica (n) koje leže na istom pravcu, tada je:

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Ako kuglice nisu na istom pravcu, nego su raspoređene u prostoru, težište ima još dvije koordinate:

$$y_T = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \text{ i } z_T = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Pomoću navedenih izraza možemo odrediti koordinate težišta krutog tijela ako su nam poznate koordinate težišta njegovih dijelova.

Gdje se nalazi težište tijela i likova pravilnog geometrijskog oblika znamo bez računa. Tako se težište homogene kugle i kruga nalazi u njihovim središtima, a kocke, kvadra, kvadrata i pravokutnika u sjecištu njihovih dijagonala itd.

Pri gibanju krutog tijela njegovo se težište giba kao da je u njemu skupljena sva masa tijela i kao da je u njemu hvatište rezultantne sile. Tako se na **slici 2.1.** težište akrobata giba putanjom po kakvoj bi se gibala kuglica u kojoj je skupljena sva masa akrobata, a to je, uz zanemariv otpor zraka, parabola.

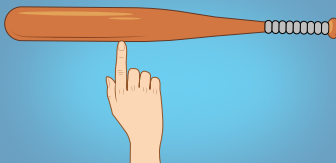
Položaj težišta možemo odrediti i pokusom.

ISTRAŽIVAČKI ZADATAK – Određivanje težišta nepravilnih tijela

Cilj: eksperimentalno odrediti položaj težišta raznih nepravilnih tijela.

1. DIO

Postupak: Odrediti položaj težišta nepravilnog tijela koje se može poduprijeti (**slika**).



Zadatak: Objasniti zbog čega je težište u točki podupiranja. Usporediti masu lijevo i desno od težišnice, prvo raspravom, a onda i eksperimentalno.

No što ako je tijelo takvog oblika da se ne može poduprijeti (šalica, kutnik)?

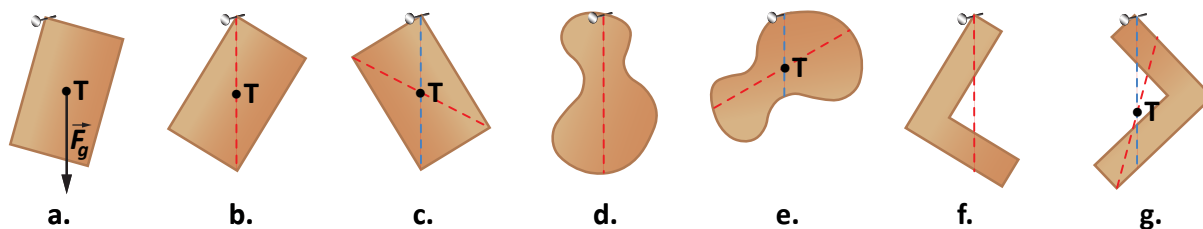
2. DIO

Postupak: Prvo o čavao ovjesimo homogeno tijelo *pravilna* oblika kako prikazuje **slika 2.4.a.** i pustimo. Tijelo zbog momenta sile teže neće zadržati taj položaj. Ono će se umiriti u položaju u kojem se težište nalazi na vertikali ispod ovjesa (**slika 2.4.b.**). Ta je vertikala težišnica pa je iscrtajte na tijelu. Ovjesite tijelo u nekoj drugoj točki i ponovo iscrtajte težišnicu. Gdje se nalazi težište? (**slika 2.4.c**)

Zaključak: Težište je u sjecištu težišnica.



Na taj način možemo odrediti gdje se nalazi težište tijela *nepravilna* oblika bez obzira je li ono unutar (slika 2.4.d. i e.) ili izvan tijela (slika 2.4.f. i g.). Tijelo treba ovjesiti o dvije točke i naći sjecište težišnica.



Slika 2.4. Određivanje položaja težišta pokusom

UČENIČKI VIRTUALNI POKUS – težište i težišnice

Otvorite interaktivnu računalnu simulaciju na poveznici:

<https://www.physicsclassroom.com/Physics-Interactives/Balance-and-Rotation/COM-Builder/Center-Of-Mass-Interactive> ili upotrijebite priloženi QR kod. Kreirajte

nepravilno tijelo po želji i ovjesite ga na više mjesta. Kroz koju točku prolazi svaka težišnica?

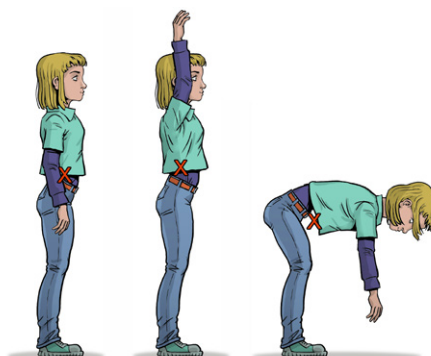


Izbjegni pogrešku!

Težište neke osobe uvijek je u istoj točki unutar tijela.

Položaj težišta pomičan je i ovisi o trenutačnom položaju ruku, nogu i trupa.

Težište ljudskog tijela. Položaj težišta prosječnog čovjeka koji uspravno stoji s rukama uz tijelo nalazi se malo ispod pupka, u sredini između prednje i stražnje strane tijela (slika 2.5.). Težište se mijenja sa svakim pokretom – kad podignemo ruke, ono se pomiče prema gore, a kad se sagnemo, može biti i izvan tijela.



Slika 2.5. Težište ljudskog tijela



Primjer: Nađimo koordinate težišta kutnika prikazanog na slici. Zanimarimo debljinu (treću dimenziju) kutnika.

Rješenje:

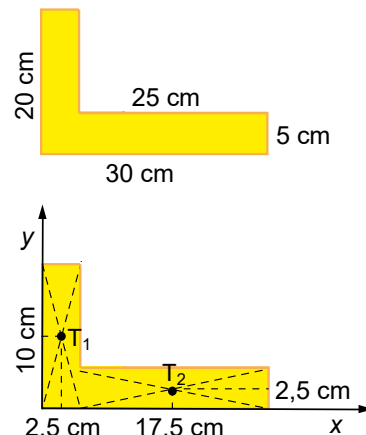
Smjestimo kutnik u koordinatni sustav prema slici i razdijelimo ga na dva dijela pravokutnog oblika. Težišta su pravokutnika u sjecištima dijagonala. Njihove su mase proporcionalne površinama (S), stoga u izraze za koordinate težišta umjesto masa možemo uvrstiti odgovarajuće površine:

$$S_1 = 5 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$$

$$S_2 = 25 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^2$$

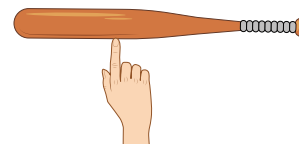
$$x_T = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{100 \text{ cm}^2 \cdot 2,5 \text{ cm} + 125 \text{ cm}^2 \cdot 17,5 \text{ cm}}{100 \text{ cm}^2 + 125 \text{ cm}^2}, \quad x_T = 10,8 \text{ cm}$$

$$y_T = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2} = \frac{100 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} + 125 \text{ cm}^2 \cdot 2,5 \text{ cm}}{100 \text{ cm}^2 + 125 \text{ cm}^2}, \quad y_T = 5,8 \text{ cm}$$



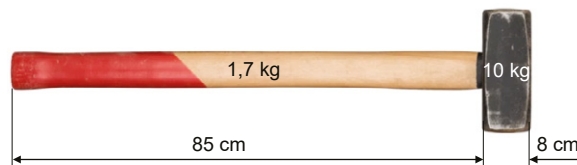
Konceptualna pitanja

- Može li se težište nalaziti izvan tijela? Ako mislite da može, navedite primjer.
- Kako biste odredili položaj težišta nehomogene kružne ploče?
- Granata ispaljena iz topa giba se po paraboli sve dok ne padne na tlo, gdje eksplodira. Kada bi granata eksplodirala u zraku, bi li se težište krhotina nastavilo gibati po putanji po kojoj bi se gibala granata da nije eksplodirala ili po nekoj drugoj putanji nepravilna oblika?
- Koji dio bata ima veću masu: onaj lijevo ili onaj desno od težišta? Ili su ta dva dijela jednakih masa? Obrazložite.
- Može li učenik koji sjedi pomaknuti svoje težište uvis bez ustajanja? Ako mislite da može, navedite kako.



Numerički zadatci

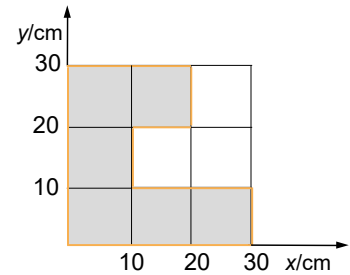
- Gdje se nalazi težište čekića prikazanog na slici?



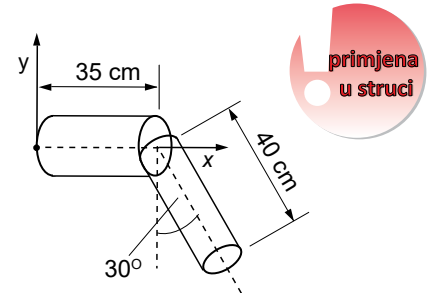
- Duljina je nekog čamca 18 m, masa 100 kg. Ako je težište praznog čamca na polovini njegove duljine, gdje će biti težište kada osoba od 60 kg sjedne na krmu, a osoba od 80 kg na pramac čamca?

3. Homogeni komad čeličnog lima oblikovan je kao što je prikazano na **slici**. Izračunajte koordinate x i y težišta komada.

4. Homogena vrata imaju masu 30 kg, a širinu i visinu 2 m i 3 m. Kvaka mase 50 dag nalazi se na polovini visine, a od bližeg je bočnog ruba udaljena 25 cm. Gdje se nalazi težište vrata?



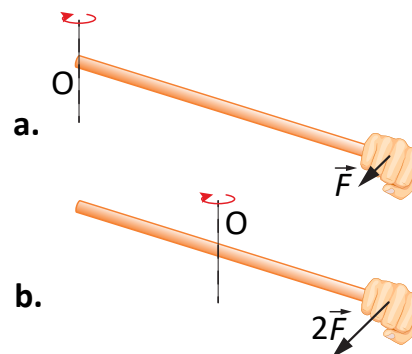
5. Marija sjedi na sjedalici tako da joj potkoljenica s vertikalom zatvara kut od 30° . U računalnome modelu njezinu natkoljenicu predočava homogeni valjak mase 20 kg i duljine 35 cm, a potkoljenicu valjak mase 10 kg i duljine 40 cm (**slika**). Gdje se nalazi težište Marijine noge?



6. Jedna je polovina štapa dugog 40 cm od bakra, a druga od aluminija. Gdje se nalazi težište štapa ako je njegov presjek svuda jednak? Gustoća je bakra $8\,900\text{ kg/m}^3$, a aluminija $2\,700\text{ kg/m}^3$.

Jednadžba rotacije

Na štap prvo djelujemo silom kao na **slici 3.1.a.**, a zatim djelujemo dva puta većom silom uz dva puta manji krak (**slika 3.1.b.**). U obama su slučajevima momenti sila jednaki. Hoće li štap u obama slučajevima postići istu kutnu brzinu u istom vremenu? Ako neće, u kojem će od slučajeva kutna brzina biti veća?



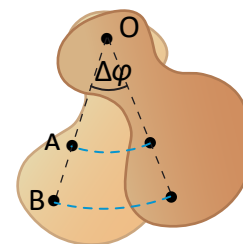
Slika 3.1.

Pri rotaciji krutog tijela oko nepomične osi njegove se točke gibaju po koncentričnim kružnicama. Na **slici 3.2.** istaknute su točke A i B koje se tako gibaju. Primijetimo da u određenom vremenu (Δt) spojnice obiju točaka s osi rotacije opišu isti kut ($\Delta\varphi$). Kvocijentom opisanog kuta i pripadnog vremena definirana je fizikalna veličina nazvana **kutna brzina** (ω):

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

koja se iskazuje radijanima u sekundi (rad/s).

Kutna je brzina vektorska veličina. Savijemo li prste desne ruke u smjeru rotacije, ispruženi palac, koji je okomit na ostale prste, pokazuje orijentaciju kutne brzine.



Slika 3.2. Rotacija krutog tijela oko nepomične osi

Vidimo da je kutna brzina jednaka za sve točke krutog tijela, pa možemo reći da je to kutna brzina rotacije krutog tijela.

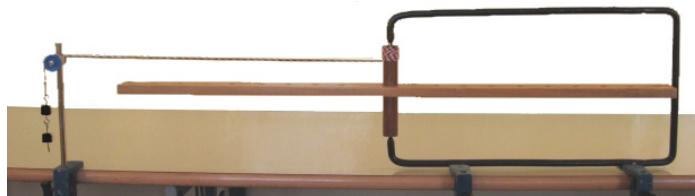
Ako se kutna brzina tijela tijekom vremena mijenja, kažemo da tijelo ima kutnu akceleraciju. **Srednja kutna akceleracija** ($\bar{\alpha}$) kvocijent je promjene kutne brzine i pripadnog vremenskog intervala:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Ako je vremenski interval vrlo malen, kvocijent promjene kutne brzine i tog vremenskog intervala zovemo trenutačnom kutnom akceleracijom ili samo kutnom akceleracijom (α).

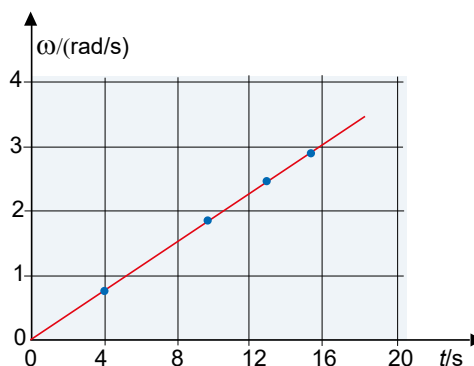
Mjerna je jedinica za kutnu akceleraciju rad/s^2 . Kutna akceleracija ima orijentaciju promjene kutne brzine, što znači da su pri povećanju kutne brzine kutna akceleracija i kutna brzina iste orijentacije, a pri smanjenju kutne brzine su suprotnih orijentacija.

Da bi se kruto tijelo zakrenulo i počelo rotirati oko nepomične osi, potreban je moment sile. On mijenja kutnu brzinu, odnosno daje krutom tijelu kutnu akceleraciju. Pomoću uređaja prikazanog na **slici 3.3.** možemo istraživati rotaciju krutog tijela pri stalnom momentu sile. Kruto je tijelo komad daske proboden na sredini valjkom. Rotaciju uzrokuju utezi ovješeni o nit. Sila djeluje duž niti i jednaka je sili teži na utege, a krak je jednak polumjeru valjka oko kojega je nit namotana.



Slika 3.3. Uređaj za proučavanje rotacije krutog tijela

Prikažemo li grafički ovisnost kutne brzine o vremenu, dobit ćemo graf kao na **slici 3.4**. Vidimo da se kutna brzina jednoliko povećava. Takvo gibanje zovemo **jednoliko ubrzanom rotacijom**. Kutna akceleracija (α) pri tom je gibanju stalna i pozitivna. Dakle, pri stalnom momentu sile kruto tijelo rotira stalnom kutnom akceleracijom. Kada je kutna akceleracija stalna i negativnog predznaka, govorimo o **jednoliko usporenoj rotaciji**.

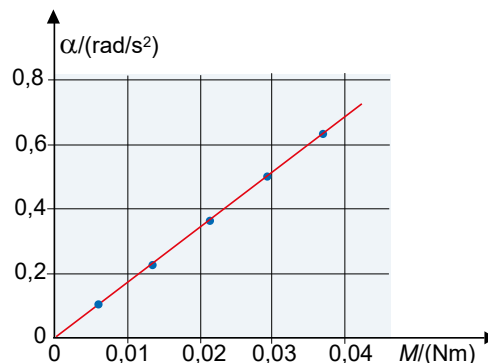


Slika 3.4. Pri stalnom momentu sile rotacija je jednoliko ubrzana.

Uređajem sa **slike 3.3**, možemo istražiti kako kutna akceleracija ovisi momentu sile. Ta ovisnost prikazana je grafom na **slici 3.5**. Jednadžba pravca na kojem leži graf glasi:

$$\vec{M} = I\vec{\alpha},$$

a poznata je kao **jednadžba rotacije**. Veličina označena I zove se **moment tromosti** ili **moment inercije**. Ona pokazuje u kolikoj se mjeri kruto tijelo opire promjeni kutne brzine. Mjerna jedinica momenta tromosti jest kg m^2 .



Slika 3.5. Kutna akceleracija proporcionalna je momentu sile.

Fizikalne veličine i izrazi za rotacijsko gibanje analogni su onima za translacijsko gibanje. U **tablici 1** navedene su fizikalne veličine, a u **tablici 2** izrazi za oba gibanja.