

2026./2027.

ALFA 

Matematika i Fizika

NOVI
UDŽBENICI
za trogodišnje i
četverogodišnje
srednje
strukovne
škole



Matematika u struci

trogodišnje srednje
strukovne škole

Matematika 2

2. razred četverogodišnjih
srednjih strukovnih škola

Fizika u struci

četverogodišnje srednje
strukovne škole

Sadržaj

5

UVOD

6

PRILAGODBA NASTAVNIH MATERIJALA
KURIKULSKIM ZAHTJEVIMA

8

PODRŠKA ZA
IZVRSNOST UČITELJA

10

MATEMATIKA
ZA TROGODIŠNJE STRUKOVNE ŠKOLE,
Matematika u struci

Temeljno načelo udžbenika - integrirani zadatci kao temelj učenja	12
Metodička struktura svakog poglavlja	13
Metodička podrška za udžbenike <i>Matematika u struci</i>	14
Digitalni udžbenik na mozaBooku	15
Prikaz udžbeničkih jedinica	16

32

MATEMATIKA
ZA ČETVEROGODIŠNJE STRUKOVNE ŠKOLE,
Matematika 2

Temeljno načelo udžbenika - integrirani zadatci kao temelj učenja	34
Metodička struktura svakog poglavlja	34
Metodička podrška za udžbenik <i>Matematika 2</i>	36
Digitalni udžbenik na mozaBooku	37
Prikaz udžbeničkih jedinica	38



58

FIZIKA
ZA ČETVEROGODIŠNJE STRUKOVNE ŠKOLE,
Fizika u struci

Temeljna načela udžbenika – aktivno, iskustveno i problemsko učenje fizike s izravnom primjenom u tehničkim i drugim strukama	60
Metodička struktura svakog poglavlja	60
PhET simulacije	62
Metodička podrška za udžbenike <i>Fizika u struci</i>	62
Digitalni udžbenik na mozaBooku	63
Prikaz udžbeničkih jedinica	64

76
MOZABOOK

78
ALFA KABINET

82
ALFA EDUKACIJE

84
EDUBLOG

86
ZAŠTO ALFA?

88
INFORMACIJE
I ODGOVORI

90
KONTAKTI

Uvod



Poštovani nastavnici,

pred vama je detaljan pregled novih udžbenika i cjelovite metodičke podrške koja ih prati. Svjesni smo da srednjoškolsko strukovno obrazovanje nosi specifičnu odgovornost – razvoj stručnih kompetencija, pripremu mladih za tržište rada, ali i za nastavak akademskog obrazovanja. Upravo je zato naša uloga osigurati vam alate koji te visoke ciljeve čine ostvarivima u svakodnevnoj praksi.

U katalogu donosimo i pregled šire podrške koja dolazi uz udžbenike. Uz onu metodičku na **Alfa Kabinetu**, dio su podrške i redovita stručna *online* usavršavanja – **Alfa edukacije** kojima je cilj prikaz metodičko-pedagoškog rada i praćenje aktualnih tema u struci. Skrećemo vam pozornost i na digitalne udžbenike na platformi **mozaBook**, kojoj kao korisnik Alfinih udžbenika imate besplatni pristup. Platforma nudi neograničene prilike za interaktivnu nastavu, vizualizaciju složenih procesa i inovativan pristup strukovnim sadržajima.

Vjerujemo da se prava vrijednost udžbenika najbolje vidi u njegovoj primjeni. Pa kako biste u potpunosti stekli uvid u širinu materijala i usluga koje nudimo, **pozivamo vas da dogovorite prezentaciju uživo s našim stručnim suradnikom**. On će vam izložiti sve sastavnice naše podrške i dočarati iskustvo korisnika Alfinih udžbenika.

Naša je misija podržati vašu autonomiju jer izvrsnost u radu proizlazi upravo iz nje. Kontinuirano razvijamo materijale koji vam omogućuju slobodu u poučavanju, uz sigurnost koju pružaju vrhunska priprema i podrška.

Ako ste već naš korisnik, vjerujemo da smo opravdali vaš izbor i nadamo se daljnjoj suradnji. Ako tek birate – dobro došli u Alfa-tim!

Želimo vam mnogo uspjeha u radu!

Vaša Alfa



Prilagodba nastavnih materijala kurikulskim zahtjevima

Udžbenici su izrađeni kao cjeloviti nastavni izvori koji u potpunosti zadovoljavaju udžbenički standard i zahtjeve kurikula. Zbog metodičke slojevitosti i različitog opsega odgojno-obrazovnih ishoda unutar pojedinih sektora i smjerova udžbenici su oblikovani tako da omogućuju visoku razinu didaktičke prilagodbe. Struktura udžbenika pruža nastavniku autonomiju u izboru i organizaciji nastavnog sadržaja.

Podrška za izvrsnost nastavnika

Kontaktirajte stručnog suradnika za svoju županiju i dogovorite prezentaciju udžbeničkog kompleta i cjelovite metodičke podrške ili postavite upit.



Lobel Dedić	098/9832-209	regionalni voditelj	Grad Zagreb	lobel.dedic@alfa.hr
Matea Puđak	095/3426-478	stručni suradnik – promotor	Grad Zagreb, Zagrebačka	matea.pudak@alfa.hr
Domagoj Dedić	098/9832-206	regionalni voditelj	Osječko-baranjska, Vukovarsko-srijemska	domagoj.dedic@alfa.hr
Maja Weber	091/6030-581	stručna suradnica – promotorica	Osječko-baranjska, Vukovarsko-srijemska	maja.weber@alfa.hr
Robert Martin	098/9832-208	regionalni voditelj	Koprivničko-križevačka, Bjelovarsko-bilogorska, Virovitičko-podravaska	robert.martin@alfa.hr
Sanja Šaravanja	091/3456-224	stručna suradnica – promotorica	Brodsko-posavska	sanja.saravanja@alfa.hr
Igor Šaravanja	099/3292-362	stručni suradnik – promotor	Brodsko-posavska	igor.saravanja@alfa.hr
Stjepan Josipović	091/3456-201	stručni suradnik – promotor	Požeško-slavonska	stjepan.josipovic@alfa.hr
Ivan Rakarić	098/9832-214	stručni suradnik – promotor	Sisačko-moslavačka	ivan.rakaric@alfa.hr
Sandra Findrik	091/3456-014	stručna suradnica – promotorica	Sisačko-moslavačka	sandra.findrik@alfa.hr
Damir Filipović	099/3118-412	regionalni voditelj	Koprivničko-križevačka, Bjelovarsko-bilogorska, Virovitičko-podravaska, Varaždinska	damir.filipovic@alfa.hr
Diane Georgine Kovač	099/3292-345	stručna suradnica – promotorica	Koprivničko-križevačka, Virovitičko-podravaska	diane.kovac@alfa.hr
Ivana Baranić	091/6181-892	stručna suradnica – promotorica	Koprivničko-križevačka	ivana.baranic@alfa.hr
Ivana Pirin	099/7878-207	stručna suradnica – promotorica	Bjelovarsko-bilogorska	ivana.pirin@alfa.hr
Robina Poljak	099/3292-361	stručna suradnica – promotorica	Varaždinska	robina.poljak@alfa.hr
Petra Markulin	098/9832-217	regionalna voditeljica	Krapinsko-zagorska	petra.markulin@alfa.hr
Margareta Hudiček	099/3292-344	stručna suradnica – promotorica	Međimurska	margareta.hudicek@alfa.hr
Mirela Puček	091/3456-227	stručna suradnica – promotorica	Varaždinska, Međimurska	mirela.pucek@alfa.hr

Iva Šaronja	091 3456-222	stručna suradnica – promotorica	Krapinsko-zagorska	iva.saronja@alfa.hr
Bojana Meandžija	098/210-909	regionalna voditeljica	Karlovačka	bojana.meandzija@alfa.hr
Anamarija Šebalj	099/3292-349	stručna suradnica – promotorica	Ličko senjska	anamarija.sebalj@alfa.hr
Dina Lukač	099/3292-356	stručna suradnica – promotorica	Karlovačka	dina.lukac@alfa.hr
Ana Linić Faraguna	091/3456-210	regionalna voditeljica	Primorsko-goranska	ana.linic@alfa.hr
Zvonimir Fogas	099/3292-352	stručni suradnik – promotor	Primorsko-goranska	zvonimir.fogas@alfa.hr
Noa Maričić	091/3456032	stručni suradnik – promotor	Primorsko-goranska	noa.maricic@alfa.hr
Patrik Zubaj	091/3456-205	stručni suradnik – promotor	Istarska	patrik.zubaj@alfa.hr
Vedrana Bjedov	098/352-556	stručna suradnica – promotorica	Istarska	vedrana.bjedov@alfa.hr
Jelena Špar	098/266-236	regionalna voditeljica	Splitsko-dalmatinska	jelena.spar@alfa.hr
Zorana Vrcić Slišković	091/3456-215	stručni suradnik – promotor	Šibensko-kninska	zorana.vrcic.sliskovic@alfa.hr
Luka Majčica	099/2182-535	stručni suradnik – promotor	Dubrovačko-neretvanska	luka.majcica@alfa.hr
Marijana Žuvela	099/3647-403	stručna suradnica – promotorica	Dubrovačko-neretvanska	marijana.zuvela@alfa.hr
Antonia Bulj	099/3113-885	stručna suradnica – promotorica	Splitsko-dalmatinska	antonia.bulj@alfa.hr
Mile Barić	099/3130-932	stručni suradnik – koordinator	Splitsko-dalmatinska	mile.baric@alfa.hr
Marina Dajak	099/3132-448	stručna suradnica – promotorica	Splitsko-dalmatinska	marina.dajak@alfa.hr
Ivana Šabić Biloderić	098/314-446	stručna suradnica – koordinatorica	Zadarska	ivana.sabic@alfa.hr
Nevia Dadić	099/3292-350	stručna suradnica – promotorica	Zadarska	nevia.dadic@alfa.hr
Vita Gobin	095/5275-481	stručna suradnica – promotorica	Zadarska	vita.gobin@alfa.hr

MATEMATIKA ZA TROGODIŠNJE STRUKOVNE ŠKOLE



Matematika u struci

Autorski tim: dr.sc. Ružica Soldo, Ivan Benić, Melita Crnković, Ana Borbaš Bajvić, Tea Borković



Osnove matematike
Podatci i financijska pismenost
Analitička geometrija



Funkcije
Analitička geometrija



Matematika u struci pisana je s razumijevanjem potreba i motivacija današnjih učenika strukovnih škola, s posebnim naglaskom na primjenu matematičkih koncepata u različitim stručnim područjima. Udžbenik je kvalitetno metodički koncipiran – promišljeno oblikovan na razini svakog poglavlja posebno, kao i u cjelini.



Funkcije · Analitička geometrija
Udžbenik iz matematike za trogodišnje strukovne škole

Matematika u struci podijeljena je u dva sveska u kojima su moduli strukturirani tako da prvi svezak za sve strukovne sektore sadrži module koji se pojavljuju u prvom razredu. Drugi svezak dopunjava prvi modulima koji se pojavljuju u drugom i trećem razredu.

Moduli su strukturirani prema skupinama ishoda definiranim kurikulom. Svaka skupina ishoda ima izdvojeno poglavlje koje se sastoji od broja poglavlja, popisa ishoda i broja CSVET bodova koji se postižu ostvarivanjem ishoda.

1. SVEZAK SADRŽI MODULE:

- Osnove matematike
- 1. Realni brojevi i potencije
- 2. Linearna jednačina
- 3. Kvadratna jednačina
- Podatci i finansijska pismenost
- 4. Statistika i vjerojatnost
- 5. Finansijska pismenost
- Geometrija
- 6. Geometrija ravnine
- 7. Trigonometrija
- 8. Geometrija prostora

2. SVEZAK SADRŽI MODULE:

- Funkcije
- 9. Linearna funkcija
- 10. Kvadratna funkcija
- 11. Eksponencijalna i logaritamska funkcija
- 12. Trigonometrijske funkcije
- 13. Nizovi
- Analitička geometrija
- 14. Koordinatni sustav i vektori
- 15. Pravac i kružnica

Temeljno načelo udžbenika – integrirani zadatci kao temelj učenja

Metodičko oblikovanje udžbenika utemeljeno je na **načelu uparivanja primjera i zadataka**, kojim se postiže usmjerenost učenika na razmatrani koncept. Takav pristup analizom, promišljanjem i primjenom vodi i usmjerava učenika prema višim razinama kognitivne zahtjevnosti.

Udžbenik je usklađen s modernim pristupom kurikulu, diferenciranim poučavanjem i formativnim vrednovanjem, čime je učenik stavljen u središte poučavanja i njegov je aktivni sudionik.

Svaka nastavna jedinica obraća se učeniku izravno i komunicira s njim u svakom dijelu – od prisjećanja prethodnog gradiva do samostalnog rješavanja zadataka.

Nastavne cjeline postupno i metodički pomažu učeniku ostvariti ishode predviđene kurikulom. Svaka nastavna jedinica započinje kratkim prisjećanjem matematičkih znanja relevantnih za tu lekciju, slijedi motivacijski primjer, a zatim **teorijska pozadina**.

Nakon svakog koncepta naveden je riješen primjer te jedan ili više zadataka za samostalan rad. Riješenih je primjera mnogo i pokrivaju sva potrebna znanja kako bi učenici mogli samostalno rješavati zadatke koji slijede.

Zadatci su osmišljeni maštovito i s naglaskom na primjenu u raznim područjima, koja pokrivaju različite struke te obuhvaćaju različite znanosti, umjetnost, svakodnevni život, kao i moderne koncepte poput društvenih mreža ili kriptovaluta.

METODIČKA STRUKTURA SVAKOG POGLAVLJA



Prisjeti se! Svaka nastavna jedinica započinje **prisjećanjem prethodnog gradiva**, nastavlja se motivacijskim primjerom koji postavlja kontekst, a **gradivo se razrađuje u brojnim riješenim primjerima i zadacima za samostalan rad.**

Rubrika **Zanimljivost!** pruža uvid u stvarnu primjenu matematike u znanstvenim istraživanjima te praktičnim situacijama u svakodnevnom životu uz zanimljive povijesne anegdote.

Nakon svake obrađene cjeline učenici mogu rješavati zadatke u **tri dodatne razine provjere**. Prvi dio **Provjeri svoje znanje** sastoji se od 20 pitanja s višestrukim odgovorima. Na taj način učenici mogu samostalno procijeniti razinu usvojenosti gradiva i identificirati područja koja zahtijevaju dodatno vježbanje.

U drugom dijelu nalaze se **Zadatci za ponavljanje** koji se sastoje od raznovrsnih klasičnih zadataka za ponavljanje osmišljenih kako bi učenicima pomogli u utvrđivanju gradiva i temeljitoj pripremi za provjere znanja.

U završnom dijelu **Učenje temeljeno na radu** obuhvaćeni su **projektni zadatci** koji potiču učenike na kreativno razmišljanje i praktičnu primjenu stečenih matematičkih znanja u rješavanju stvarnih problema.



Na kraju udžbenika nalaze se **rješenja svih zadataka iz svih poglavlja**, što učenicima omogućuje samostalno provjeravanje svojih odgovora i razumijevanje postupaka rješavanja.

Metodička podrška za udžbenike Matematika u struci

Metodička podrška za oba udžbenika dostupna su na nastavničkoj platformi Alfa Kabinet (kabinet.alfa.hr) i redovito se dopunjava novim sadržajima. Svi korisnici udžbenika imaju neograničen pristup materijalima.

- GIK (godišnji izvedbeni kurikulum)
- metodičke pripreme za svaki nastavni sat
- prezentacije za svaki nastavni sat
- prijedlog učeničkog zapisa za učenike s teškoćama
- nastavni listići s dodatnim zadacima za vježbanje
- kartice za formativno vrednovanje
- apleti GeoGebra
- digitalni obrazovni sadržaji u mozaBooku

- cjelovita ispisana rješenja svih zadataka
- **baza zadataka** koja donosi pažljivo strukturirane zadatke prema razinama i ishodima iz koje nastavnik može samostalno odabrati tipove zadataka za provjere znanja



Metodičku podršku možete pregledati na Kabinetu!

Digitalni udžbenik na mozaBooku

Uz svaki tiskani udžbenik korisnik dobiva i licencu za digitalni udžbenik. Digitalni udžbenik vrijedi godinu dana, vezan je za vaš mozaWeb korisnički račun, a po isteku licence može se reaktivirati.

Digitalni udžbenik dostupan je na svim uređajima i platformama: putem mozaWeb stranice u bilo kojem internetskom pregledniku, u mozaBook softveru za Windows (komercijalna licenca) te u besplatnoj mozaBook aplikaciji za mobilne uređaje (iOS i Android). Svi korisnici mogu besplatno instalirati mozaBook na mobitel ili tablet i preuzeti udžbenik za korištenje bez internetske veze.

Licencu će aktivirati vaš promotor.

2.1.1.4. Radni listić – Linearna jednadžba (primjena)

1. Izrazi:

a) x iz formule $v = \frac{z}{x}$ b) U iz formule $I = \frac{U}{R}$ c) v iz formule $P = Fv$
d) p iz formule $p = \frac{m}{V}$ e) t iz formule $P = \frac{W}{t}$ f) r iz formule $v = 2\pi rf$

2. Izrazi:

a) x iz jednadžbi $x + 2y = 4$ b) x iz jednadžbi $-3x + 5y = 2$
c) y iz jednadžbi $4x + y = 6$ d) y iz jednadžbi $-5x = 2y + 3$
e) y iz jednadžbi $\frac{x}{2} = 3x$ f) x iz jednadžbi $\frac{2x}{3} = \frac{2x+2}{2}$

3. Marko je zamislio neki broj. Dodao mu je 6, pomnožio sve s 3 i dobio broj 51. Koji je broj zamislio Marko?

4. Katarina je zamislila neki broj. Oduzela mu je 15, podijelila sve sa 4 i dobila -3. Koji je broj Katarina zamislila?


5. Hajlina je duplo skuplja od majice. Koliko košta majica, a koliko haljina ako zajedno koštaju 4x.

6. Za izradu torte Karla je potrebno $\frac{1}{2}$ boce ulja. Koliko je bila ulja u neotvorenoj boci, ukoliko nakon izrade torte joj je ostalo 9,6 dl?

7. U kućanstvu je mjesečni račun za plin 158,50 €. Ako znamo da je mjesečni fiksni trošak iznosi 4,50 €, a cijena jednog kubnog metra plina iznosi 0,55 €, koliko je kubnih metra plina potrošilo ovo kućanstvo?

8. Tri građevinska radnika za određeni posao zaradili su ukupno 760 €. Obzirom da nisu radili jednak broj sati na tom projektu, prvi radnik će dobiti 48 € više od drugog radnika, a treći 104 € manje od prvog radnika. Koliko će dobiti svaki radnik za obavljenu posao?

9. Keramičar treba postaviti pločice u kući obitelji Marić. Koliko iznosi površina na koju treba postaviti pločice ako znamo da je prvi dan postavio $\frac{1}{2}$ ukupne površine na koju će ići pločice, drugi dan $\frac{1}{3}$ ukupne površine, a treći dan završio je s poslom i taj dan je postavio 20m².



UČENJE TEMELJENO NA RADU

Projektni zadatak

a) Odaberi jedan novi i jedan rabljeni automobil (isti model). Zapiši njihovu cijenu i ispiši osnovne podatke: godinu proizvodnje, cijenu, prijeđene kilometre, prosječnu potrošnju goriva. Prikaži podatke u tablici.

b) Odredi mjesečni trošak posjedovanja automobila.

- iznos za potrošeno gorivo uz pretpostavku da automobil prijezi ukupno 12 000 km godišnje
- cijena održavanja: 500 € za novi, 600 € za rabljeni automobil
- osiguranje u iznosu od 500 €
- izračunaj ukupni trošak za 5 godina.

c) Za novi automobil pretpostavi da gubi 12% vrijednosti godišnje, a za rabljeni 7%.

- Ispišni tablicu vrijednosti tijekom 5 godina
- Nacrtaj graf vrijednosti za oba automobila.
- Nakon koliko godina novi automobil gubi pola vrijednosti?

d) Pretpostavi da umjesto kupnje automobila uložiš 5000 € u investicijski fond s godišnjim prinosom 5%.

- Izračunaj vrijednost štednje nakon 5 godina.
- Kada bi se ulog udvostručio?

e) Na temelju ukupnih troškova (gorivo, održavanje, gubitak vrijednosti) i štednje kratko odgovori. Što se više isplati: novi automobil, rabljeni automobil ili štednja?

38. a) Marko ulaže 10 000 € na 3 godine uz 6% godišnje, obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Koliko će novca na kraju ulaganja dobiti Marko?
b) Ana ulaže isti iznos, ali uz 5,9% godišnje, obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Koliko će novca Ana dobiti nakon 3 godine?
c) Koliko je početni ulog potreban da nakon 5 godina, uz 5% godišnje (obračun jednom godišnje), oročeni iznos naraste na 15 000 €?

39. Dana 30. srpnja 2025. zabilježen je snažan potres od 8,8 po Richteru na istočnoj obali poluočuka Kamčatke u Rusiji izazvavši cunami koji je pogodio ruske obalne gradove. Kolika je bila jakost tog potresa?

40. Dana 11. ožujka 2011. u Japanu je zabilježen potres magnitude 9,1 po Richteru. Potres je izazvao cunami, koji je pogodio obalu i uzrokovao ogromne štete. Među najteže pogođenima bila je i nuklearna elektrana Fukushima, gdje su važni poplavljeni sustav hlađenja i isparivači topljenje jezgri reaktora. Koliko je ovaj potres bio jači od potresa iz prethodnog zadatka?

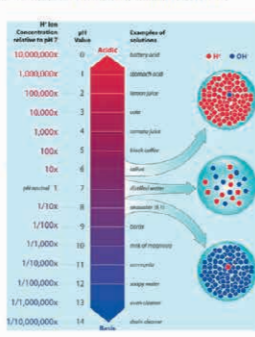
41. Učenici u školskom kemijskom kabinetu koriste pH-metar kako bi odredili kiselošću različitih otopina. pH se računa prema formuli: $\text{pH} = -\log H^+$, gdje je H^+ koncentracija vodikovih iona u otopini (u mol/L).

a) Učenici su izmjerili koncentraciju vodikovih iona u soku od naranče i dobili vrijednost $5 \cdot 10^{-4}$ mol/l. Koliko je onda pH soka od naranče? Zaokruži na jedno decimalno.
b) U čaši čiste vode izmjerjen je $\text{pH} = 7,2$. Kolika je koncentracija vodikovih iona u toj vodi?

c) Usporedi pH soka i vode. Koja je otopina kiseliša i za koliko se jedinica pH razlikuju? (Prijeti se da razlika od 1 pH znači deset puta veću koncentraciju jona H^+ .)

42. Koliko je jača kiseliša s pH 1,4 od kiseliše s pH 2,6 (zaokruži rezultat na dva decimalna mjestaja)?

43. Izračunaj pH vrijednost crne kave ako je koncentracija vodikovih iona 0,00002 mol/L.



ZADATAK 9. Zapiši sljedeće mjere kutova u stupnjima, minutama i sekundama.

a) $\alpha = 24,8^\circ$ b) $\alpha = 76,6^\circ$ c) $\alpha = 55,2^\circ$ d) $\alpha = 78,9^\circ$
e) $\alpha = 34,15^\circ$ f) $\alpha = 71,45^\circ$ g) $\alpha = 88,25^\circ$ h) $\alpha = 52,75^\circ$
i) $\alpha = 38,28^\circ$ j) $\alpha = 48,26^\circ$ k) $\alpha = 63,36^\circ$ l) $\alpha = 28,18^\circ$

PRIMJER 6. Zapišimo sljedeće mjere kutova u stupnjima.

a) $\alpha = 75^\circ 16'$ b) $\beta = 56^\circ 30' 15''$

Rješenje

Vrijedi: $1^\circ = 60'$ i $1' = 3600''$.

a) $\alpha = 25^\circ + \left(\frac{16}{60}\right)^\circ = 25^\circ + 0,26^\circ = 25,26^\circ$
b) $\beta = 56^\circ 30' 15'' = 56^\circ + \left(\frac{30}{60}\right)^\circ + \left(\frac{15}{3600}\right)^\circ = 56^\circ + 0,5^\circ + 0,00417^\circ = 56,50417^\circ$


ZADATAK 10. Zapiši sljedeće mjere kutova u stupnjima:

a) $\alpha = 34^\circ 15'$ b) $\alpha = 51^\circ 25'$ c) $\alpha = 18^\circ 54'$
d) $\alpha = 72^\circ 18' 30''$ e) $\alpha = 38^\circ 24' 24''$ f) $\alpha = 78^\circ 55' 10''$

Trigonometrijske omjere konkretnih slijastih kutova računat ćemo pomoću džepnog računala (kalkulatora).

Pri računanju trigonometrijskih omjera najprije treba obratiti pozornost na stanje u kojem radi džepno računalo. S obzirom na to da postoje tri mjerne jedinice za kut (stupnjevi, radijani i gradi), džepno računalo treba postaviti u stanje računanja sa stupnjima. Na zaslonu računala treba stajati oznaka **DEG** ili **D**.

Za zapis kuta iz stupnjeva u kut pomoću stupnjeva, minuta i sekundi možemo upotrijebiti džepna računala koja imaju tipke **DMS** ili **DMS**.



PRIMJER 7. Pomoću džepnog računala kut mjere $50,2525^\circ$ zapišimo pomoću stupnjeva, minuta i sekundi.

Rješenje

Za zapis kuta u stupnjima, minutama i sekundama na većini suvremenih džepnih računala potrebno je unijeti kut u stupnjima te pritisnuti tipku **DMS**. Konkretno, za ovaj primjer na većini džepnih računala potrebno je utipkati sljedeće: **50** **DMS** **=**

Na zaslonu računala dobivamo rezultat u minutama i stupnjima: $50^\circ 15' 9''$ (50 stupnjeva, 15 minuta i 9 sekundi).

ZADATAK 11. Kutove u stupnjima zapiši pomoću stupnjeva, minuta i sekundi.

a) $\alpha = 31,4^\circ$ b) $\alpha = 82,7^\circ$ c) $\alpha = 19,4^\circ$ d) $\alpha = 24,3^\circ$
e) $\alpha = 72,12^\circ$ f) $\alpha = 81,24^\circ$ g) $\alpha = 17,13^\circ$ h) $\alpha = 44,55^\circ$
i) $\alpha = 72,5678^\circ$ j) $\alpha = 38,5455^\circ$ k) $\alpha = 67,1234^\circ$ l) $\alpha = 85,5025^\circ$

PRIMJER 8. Pomoću džepnog računala kut mjere $50^\circ 15' 9''$ zapišimo u stupnjima.

Rješenje

Za prijelaz u decimalni zapis kuta pomoću stupnjeva potrebno je na džepnom računalu najprije unijeti kut, pritisnuti tipku **=**, a potom prijeći u decimalni zapis pomoću tipke **DMS**. Konkretno, za ovaj primjer na većini džepnih računala potrebno je utipkati sljedeće: **50** **DMS** **=** **50.2525**

Na zaslonu računala dobivamo prepisani kut u stupnjima, minutama i sekundama. Za prijelaz u zapis u stupnjima potrebno je pritisnuti tipku **DMS**.

Dakle, dobivamo: $50^\circ 15' 9'' = 50,2525^\circ$.

ZADATAK 12. Zapiši zadane kutove u stupnjima.

a) $\alpha = 28^\circ 15'$ b) $\alpha = 31^\circ 36'$ c) $\alpha = 6^\circ 5'$
d) $\alpha = 72^\circ 23'$ e) $\alpha = 52^\circ 44'$ f) $\alpha = 37^\circ 55'$
g) $\alpha = 24^\circ 15' 30''$ h) $\alpha = 61^\circ 28' 29''$ i) $\alpha = 49^\circ 55' 15''$

5.5. POREZNA PRIJAVA

PRISJETI SE!

1. Izračunaj osobni odbitak osobe koja uzdržava sina i oca.
2. Izračunaj poreznu osnovicu radnika koji ima bruto plaću 2400 € i osobni odbitak 900 €.

Dominika je vlasnica obrta za računovodstvene usluge. Vodi poslovne knjige obrtnicima, trgovačkim društvima i udrugama. U siječnju i veljači jako je zaposlena, sređuje poslovne knjige i izrađuje porezne prijave klijentima obrtnicima i onima sa slobodnim zanimanjima jer sve mora biti predano do kraja veljače preko sustava ePorezna.



UPAMTI!

Dohodak je razlika između primitaka i izdataka nastalih u istom poreznom razdoblju.

Izvori dohotka:

1. dohodak od nesamostalnog rada (plaće i mirovine)
2. dohodak od samostalne djelatnosti
3. dohodak od imovine i imovinskih prava
4. dohodak od kapitala
5. drugi dohodak.

Godišnji dohodak i godišnji porez na dohodak utvrđuju se i obračunavaju podnošenjem godišnje porezne prijave ili u posebnom postupku utvrđivanja godišnjeg poreza na dohodak koji automatski obračunava Porezna uprava.

UPAMTI!

Godišnju poreznu prijavu obvezno podnosi porezni obveznik koji u poreznom razdoblju ostvari **dohodak od samostalne djelatnosti**, a prijavu popunjava na obrascu DOH putem sustava ePorezna.

Samostalne djelatnosti jesu djelatnosti obrta, djelatnosti slobodnih zanimanja, djelatnosti poljoprivrede i šumarstva, djelatnost proizvodnje električne energije. Rok za podnošenje godišnje porezne prijave jest kraj veljače.

PRIMJER 1.

Obrtnik iz Virovitice tijekom godine ostvario je ukupne primitke u iznosu od 36 000 € te ukupne izdatke u iznosu 19 000 €. Obrtnik vodi poslovne knjige, ali nije u sustavu PDV-a. Uzdržava jedno dijete. Uplatio je 1800 € predujma poreza na dohodak.

Na temelju dostupnih podataka izračunajmo:

- a) godišnji dohodak od samostalne djelatnosti
- b) godišnji osobni odbitak
- c) godišnji porez na dohodak.
- d) Ima li obrtnik pravo na povrat poreza ili treba dodatno platiti?

✓ Rješenje

a) $\text{dohodak} = \text{primitci} - \text{izdatci} = 36\,000 - 19\,000 = 17\,000 \text{ €}$.

b) Mjesečni odbitak jest $600 + 300 = 900$ pa slijedi da je godišnji osobni odbitak $12 \cdot 900 = 10\,800 \text{ €}$

c) Već smo naučili da je porezna osnovica = dohodak – osobni odbitak. Uvrstit ćemo godišnji dohodak i godišnju osobni odbitak pa dobivamo $17\,000 - 10\,800 = 6200 \text{ €}$.

Godišnja porezna osnovica jest 6200 €. Stopa poreza u Virovitici iznosi 20 %.

Napravimo kratak pregled:

godišnji dohodak = primitci – izdatci	17 000
godišnji osobni odbitak	10 800
godišnja porezna osnovica = godišnji dohodak – godišnji osobni odbitak	6200
godišnji porez = godišnja porezna osnovica · 20 %	1240
uplaćeni godišnji predujmovi poreza na dohodak	1800
razlika za uplatu ili povrat = godišnji porez – uplaćeni porez	– 560

d) Obrtnik ima pravo na povrat poreza u iznosu od 560 €.

ZADATAK 1. Stomatolog je tijekom godine ostvario ukupne primitke u iznosu od 160 800 € te ukupne izdatke u iznosu od 105 000 €. Stomatolog vodi poslovne knjige, ali nije u sustavu PDV-a. Nema uzdržanih članova. Uplatio je 11 000 € predujma poreza na dohodak. Živi u Županji, gdje je stopa poreza na dohodak 21 %. Izračunaj razliku za uplatu ili povrat godišnjeg poreza na dohodak.

ZADATAK 2. Veterinar je tijekom godine ostvario ukupne primitke u iznosu od 44 500 € te ukupne izdatke u iznosu od 32 800 €. Veterinar vodi poslovne knjige, ali nije u sustavu PDV-a. Uzdržava oca. Uplatio je 2620 € predujma poreza na dohodak. Živi u Zadru, gdje je stopa poreza na dohodak 20 %. Izračunaj treba li veterinar uplatiti porez ili ostvaruje povrat poreza po godišnjem obračunu.

ZADATAK 3. Arhitekt iz Zagreba (porezna stopa 23 %) ukupno je ostvario 57 000 € primitaka uz ukupne izdatke u iznosu od 20 000 €. Uzdržava dvoje djece. Tijekom godine uplatio je 2000 € predujma poreza. Izračunaj godišnji dohodak i utvrdi razliku poreza za uplatu ili povrat.

ZADATAK 4. Sanja iz Rijeke (porezna stopa 22 %) dio je godine bila na rodiljnom dopustu. Tijekom godine ostvarila je primitak od plaće u iznosu od 10 850 € iz koje su obračunati doprinosi u iznosu od 2160 € pa dohodak iznosi 8690 €. Platila je 1119.8 € poreza. Nema uzdržanih članova. Ostvaruje li Sanja povrat poreza po poreznoj prijavi?

PRIMJER 2.

Obrtnik Tomislav Markotić iz Osijeka tijekom godine ostvario je primitke iz više izvora. Ispunio je tablicu na temelju podataka iz potvrda koje su mu dostavili isplatitelji i iz poslovnih knjiga koje vodi kao obrtnik.

Izvor primitka (dohotka)	Primitak (€)	Obvezni doprinosi (€)	Dohodak (€)	Uplaćeni porez na dohodak (€)
obrt			35 000	7000
plaća	12 000	2400	9600	330
drugi dohodak	3000	300	2700	540

Obrtnik uzdržava kćer Deu i sina Dejana. Izradimo njegovu godišnju prijavu poreza na dohodak popunjavanjem obrasca DOH.

✓ Rješenje

Izgled i sadržaj obrasca DOH propisan je Pravilnikom o porezu na dohodak. Obrazac je moguće pronaći na internetu (npr. na mrežnoj stranici RRIF <https://www.rrif.hr/preuzimanje-datoteka/> ili na stranicama HOK-a). Prikazat ćemo samo važne dijelove obrasca.

2. PODACI O UZDRŽAVANIM ČLANOVIMA UŽE OBITELJI						
R. br.	IME I PREZIME I SRODSTVO	OIB	Potom. ppa. i Gr. Vlasov. (P1, P2)	Inval. d (I ili I*)	RAZDOBLJE KORIŠTENJA (od- do)	Osobni odbitak dijeli se s osobom. Postotak osobnog odbitka
1	Dea Markotić/kćer	xxxxxxxxxx			1.1-31.12	
2	Dejan Markotić/sin	xxxxxxxxxx			1.1-31.12	
3						
4						
5						
6						
7						
8						

4.1.1. PLAĆA OSTVARENA U TUZEMSTVU IZVAN PODRUČJA P1 (prema Obrascima IP)					
R. br.	OIB POSLODAVCA / ISPLATITELJA	UKUPNI IZNOS PRIMITKA	OBVEZNI DOPRINOSI IZ PLAĆE	DOHODAK	UPLAĆENI POREZ
1	2	3	4	5 (3-4)	6
1.	xxxxxxxxxx	12.000,00	2.400,00	9.600,00	330,00
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
UKUPNO 4.1.1.				9.600,00	330,00

4.2.1. DRUGI DOHODAK OSTVAREN U TUZEMSTVU (prema potvrdama isplatitelja)						
R. br.	DRUGI DOHODAK PO OSNOVI	PRIMICI	IZDACI	OBVEZNI DOPRINOSI IZ PRIMITAKA	DOHODAK	UPLAĆENI POREZ
1	2	3	4	5	6 (3-4-5)	7
1.	PRIMITAKA ČLANOVA SKUPŠTINA I NADZORNIH ODBORA					
2.	AUTORSKIH NAKNADA					
3.	Umjetničkih, artistskih, zabavnih, sportskih, književnih, likovnih djelatnosti, te djelatnosti u svezi s tiskom, radiom, televizijom i zabavnim priredbama NEREZIDENATA					
4.	Primitaka trgovačkih putnika, agenata, alvizitera, sportskih sudaca i delegata i dr.					
5.	Primitaka u naravi, nagrada učenicima, stipendija, nagrada, naknada iznad propisanih iznosa					
6.	Primitaka učenika i studenata za rad preko posrednika za zapošljavanje učenika i studenata iznad propisanih iznosa					
7.	NAKNADA UMJETNIKA I KULTURNIH DJELATNIKA (za isporučeno umjetničko djelo)					
8.	PRIMITAKA PROFESIONALNIH NOVINARA, UMJETNIKA I ŠPORTAŠA					
9.	OSTALIH PRIMITAKA	3.000,00	0,00	300,00	2.700,00	540,00
UKUPNO 4.2.1.					2.700,00	540,00

4.3. DOHODAK OD SAMOSTALNE DJELATNOSTI OBRTA, SLOBODNIH ZANIMANJA, POLJOPRIVREDE I ŠUMARSTVA I DJELATNOSTI KOJE SE OPOREZUJU KAO SAMOSTALNA DJELATNOST (prema pregledu primitaka i izdataka)								
OIB POREZNOG OBVEZNIKA:		xxxxxxxxxx						
4.3.1. DOHODAK/ GUBITAK OSTVAREN U TEKUĆOJ GODINI								
4.3.1.1. TUZEMNI DOHODAK								
R. br.	Dohodak / gubitak pojedinca	Umanjenja dohotka / uvećanje gubitka pojedinca (ukupno pod 4.3.5. stupac 3)	ZAJEDNICKI DOHODAK		GUBITAK (<0)	DOHODAK (> ili = 0)	UPLAĆENI POREZ	
			OIB nositelja zajedničke djelatnosti	Iznos dohotka / gubitka			TUZEMNI	INOZEMNI
1	2	3	4	5	6 (2-3+5)	7 (2-3+5)	8	9
1.	35.000,00					35.000,00	7.000,00	
2.								
3.								
4.3.1.2. INOZEMNI DOHODAK								
1	DRŽAVA IZVORA				6	7	8	9
1.								
2.								
3.								
UKUPNO 4.3.1.						35.000,00	7.000,00	

5. SVEUKUPNO DOHODAK, UPLAĆENI POREZ (u eurima i centima) (4.1.7. + 4.2.3. + 4.3.3.)	DOHODAK	UPLAĆENI POREZ	
		TUZEMNI	INOZEMNI
		47.300,00	7.870,00

Na temelju predane godišnje prijave poreza na dohodak Porezna uprava dostavit će mu Privremeno porezno rješenje s razlikom poreza za uplatu ili povrat.

ZADATAK 5. Obrtnik Alen Horvat iz Zagreba tijekom godine ostvario je primitke iz više izvora. Ispunio je tablicu na temelju podataka iz potvrda koje su mu dostavili isplataljci i iz poslovnih knjiga koje vodi kao obrtnik.

Izvor primitka (dohotka)	Primitak (€)	Obvezni doprinosi (€)	Dohodak (€)	Uplaćeni porez na dohodak (€)
obrt			48 000	8000
plaća	22 500	4500	18 000	2336.40
drugi dohodak	5300	530	4770	1097.10

Obrtnik uzdržava suprugu Sonju. Izradi njegovu godišnju prijavu poreza na dohodak popunjavanjem obrasca DOH koji ćeš pronaći na internetu.

ZADATAK 6. Liječnik Ivan Ivanić iz Šibenika tijekom godine ostvario je primitke iz dvaju izvora. Ispunio je tablicu na temelju podataka iz potvrde koju mu je dostavio isplataljci i iz poslovnih knjiga koje vodi kao liječnik.

Izvor primitka (dohotka)	Primitak (€)	Obvezni doprinosi (€)	Dohodak (€)	Uplaćeni porez na dohodak (€)
slobodno zanimanje			71 860	7000
drugi dohodak	16 200	1620	14 580	2916

Liječnik uzdržava suprugu i troje djece. Popuni obrazac DOH i izračunaj razliku poreza za uplatu ili povrat.

ZADATAK 7. Odvjetnica Zlatica Radić iz Dubrovnika tijekom godine ostvarila je primitke iz dvaju izvora. Ispunila je tablicu na temelju podataka iz potvrde koju joj je dostavio isplataljci i iz poslovnih knjiga koje vodi kao odvjetnica.

Izvor primitka (dohotka)	Primitak (€)	Obvezni doprinosi (€)	Dohodak (€)	Uplaćeni porez na dohodak (€)
slobodno zanimanje			73 720	20 000
drugi dohodak	700	70	630	126

Odvjetnica uzdržava majku Maricu i oca Ivicu. Popuni obrazac DOH i izračunaj razliku poreza za uplatu ili povrat.

ZANIMLJIVOST!

Zakon o porezu na dohodak iz 1994. uveo je moderan sustav poreza na dohodak i obvezu godišnje porezne prijave za određene kategorije poreznih obveznika. To su najčešće bili obrtnici, slobodna zanimanja i oni koji su ostvarili dohodak iz više izvora. U 2000-ima započeo je proces digitalizacije poreznog sustava, što je uključivalo uvođenje OIB-a te mogućnost *online* predaje godišnje porezne prijave putem platforme ePorezna. Ključna promjena dogodila se 2017., kada je Porezna uprava počela automatski obračunavati godišnji porez na dohodak za većinu građana, čime je podnošenje godišnje porezne prijave postalo iznimka, a ne pravilo.



ZADATCI ZA PONAVLJANJE I SAMOSTALNE AKTIVNOSTI UČENIKA

PROVJERI SVOJE ZNANJE

- Koliko je 10 % od 50?
a) 500 b) 0.5 c) 5 d) 0.2
- 10 % kojeg broja iznosi 70?
a) 0.14 b) 7 c) 7000 d) 700
- Koliko posto od 400 iznosi 40?
a) 8 b) 80 c) 0.1 d) 10
- Koliko je 15 % od 30?
a) 0.5 b) 4.5 c) 0.45 d) 45
- Učenik na testu iz matematike ima 14 bodova od mogućih 20. Izrazi rezultat u postotku.
a) 65 % b) 75 % c) 80 % d) 70 %
- Poljoprivrednik je tijekom dana ubrao 18 kg salate. Koliko kilograma salate ima drugi dan ako je ona izgubila 10 % svoje mase?
a) 1.8 kg b) 16.2 kg c) 13.5 kg d) 12 kg
- Plaća prodavača iznosi 1000 eura. Kolika je njegova plaća nakon povećanja od 4 %?
a) 40 € b) 1040 € c) 1004 € d) 1400 €
- Jednostavne kamate uz glavnica 1000 €, kamatnu stopu od 5 % i vrijeme od dvije godine jesu:
a) 100 € b) 1100 € c) 1010 € d) 10 €.
- Složene kamate uz glavnica 1000 €, kamatnu stopu od 5 % i vrijeme od jedne godine jesu:
a) 50 € b) 1102.5 € c) 1050 € d) 102.5 €.
- Osobni odbitak osobe koja uzdržava kćer i majku jest:
a) 600 € b) 900 € c) 1200 € d) 1320 €.
- Doprinosi iz bruto plaće koja iznosi 3000 € jesu:
a) 450 € b) 150 € c) 550 € d) 600 €.
- Doprinos na bruto plaću jest:
a) MIO I b) MIO II c) doprinos za zdravstveno osiguranje d) doprinos za zapošljavanje.

- Sirovine, materijal, ambalaža, energija jesu:
a) materijalni troškovi b) troškovi rada c) financijski troškovi d) troškovi usluga.
- Prijevoz, najam, troškovi knjigovodstva, troškovi vode i odvoza otpada jesu:
a) materijalni troškovi b) troškovi rada c) financijski troškovi d) troškovi usluga.
- Bruto plaća, dnevnice, prijevoz na posao, božićnica, regres jesu:
a) materijalni troškovi b) troškovi rada c) financijski troškovi d) troškovi usluga.
- Postupak postupnog umanjivanja vrijednosti imovine tijekom vijeka trajanja naziva se:
a) akumulacija b) kalkulacija c) amortizacija d) formacija.
- Plaća se smatra:
a) dohotkom od samostalne djelatnosti b) dohotkom od nesamostalnog rada
c) dohotkom od kapitala d) drugim dohotkom.
- Vrijednost proizvoda, robe ili usluge na tržištu jest:
a) marža b) rabat c) cijena d) zarada.
- Cijena po kojoj se prodaje proizvod, roba ili usluga krajnjim potrošačima naziva se:
a) nabavna cijena b) proizvodna cijena c) maloprodajna cijena
d) veleprodajna cijena.
- Rok za predaju godišnje porezne prijave za prethodnu godinu jest:
a) do kraja veljače b) do 30. lipnja c) do 30. travnja d) do kraja godine.

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

/5.1. Postotni i kamatni račun

- Obitelj Rončević kasni s plaćanjem računa za vodu pa im trgovačko društvo Voda šalje obračun zateznih kamata. Obitelj Rončević dužna je 216 € za šest mjeseci. Koliku će kamatu zaračunati trgovačko društvo Voda ako je godišnja kamatna stopa 12.25 %?
- Obrtnica Julka dvije godine duguje 520 € za prijevozne usluge. Koliko iznosi zatezna kamata koju će platiti ako se zatezna kamata obračunava po stopi od 10.15 %?
- Obrtu Boja dostavljen je obračun kamata u iznosu od 54 € na pozajmicu od 1200 € s ugovorenom kamatnom stopom od 6 %. Na koje je vrijeme ugovorena pozajmica?

4. Obrt CNC izgubio je spor tijekom 2025. godine i platio je 2.91 € kamate po stopi od 5 % godišnje za 25 dana. Koji je iznos glavnice?
5. Obrt Travica posudio je 2024. godine 10 000 € od drugog obrtnika za tekuću likvidnost uz dogovor da će vratiti novac za 100 dana uz kamatnu stopu od 3 % godišnje. Koliko je obrt platio ugovorenu kamatu?
6. Alenka ulaže 7500 € u državne obveznice s fiksnom godišnjom kamatnom stopom od 3 % uz godišnju isplatu kamata i s jednokratnom otplatom glavnice, dospijeća za dvije godine. Koliko će ukupno Alenka zaraditi na državnim obveznicama?
7. Veselko ulaže 9300 € u trezorske zapise uz godišnju stopu prinosa od 2.5 % i dospijeće za 364 dana. Koliko će ukupno Veselko zaraditi na trezorskim zapisima?
8. Jelena je uložila 2500 € u državne obveznice i nakon godinu dana uplaćen joj je iznos od 60 € kamata. Koliko iznosi kamatna stopa na državne obveznice?
9. Dario je oročio 25 000 € uz godišnju kamatnu stopu od 2.3 %. Koliko će Dario imati eura nakon 4 godine ako je obračun kamata godišnji i složen, a koliko ako je obračun kamata jednostavan?
10. Katarina ulaže 5000 € u investicijski fond koji ima prosječni prinos od 4 % godišnje. Kojim će iznosom Katarina raspolagati za petnaest godina, a kojim za dvadeset godina?
11. Agneza je oročila 20 000 € s kamatnom stopom od 3.25 % godišnje. Koliko će novca imati nakon tri godine ako je obračun kamata tromjesečni (4 puta godišnje) i složen?



/5.2. Bruto i neto plaća

12. Izračunaj doprinose iz plaće, doprinos na plaću, dohodak i ukupni trošak poslodavca ako je iznos bruto plaće:
 - a) 1400 € b) 1700 € c) 2200 € d) 3000 €.
13. Izračunaj doprinose iz plaće i dohodak ako je iznos bruto plaće:
 - a) 1270 € b) 1160 € c) 980 € d) 1050 €.
14. Izračunaj osobni odbitak osobe:

a) koja uzdržava kćer i oca	b) koja uzdržava dvoje djece i oba roditelja
c) koja uzdržava četvero djece	d) koja uzdržava bračnog partnera i majku
e) koja je invalid	f) koja uzdržava invalidnog oca.

15. Izračunaj poreznu osnovicu i porez po stopi od 20 % ako je:
 - a) iznos dohotka 1420 €, a osobni odbitak 600 €
 - b) iznos dohotka 2600 €, a osobni odbitak 1500 €
 - c) iznos dohotka 1835 €, a osobni odbitak 900 €
 - d) iznos dohotka 900 €, a osobni odbitak 600 €.
16. Izračunaj neto plaću radnika (uz stopu poreza od 20 %) ako je zadano:

a) bruto plaća 1500 €, osobni odbitak 900 €	b) bruto plaća 1640 €, osobni odbitak 600 €
c) bruto plaća 2500 €, osobni odbitak 1320 €	d) bruto plaća 1900 €, osobni odbitak 900 €
e) bruto plaća 1870 €, osobni odbitak 600 €	f) bruto plaća 4000 €, osobni odbitak 1500 €
g) bruto plaća 3000 €, osobni odbitak 1620 €	h) bruto plaća 2200 €, osobni odbitak 1200 €.
17. Izračunaj neto plaću radnika (uz stopu poreza od 20 %) ako je zadano:

a) bruto plaća 1280 €, osobni odbitak 600 €	b) bruto plaća 1210 €, osobni odbitak 900 €
c) bruto plaća 1180 €, osobni odbitak 600 €	d) bruto plaća 990 €, osobni odbitak 600 €
18. Izračunaj neto plaću radnika (uz stopu poreza od 20 %) koji ima bruto plaću 1800 € i osobni odbitak:

a) 600 €	b) 900 €	c) 1200 €	d) 1500 €.
----------	----------	-----------	------------

Kako visina osobnog odbitka utječe na visinu neto plaće?
19. Izračunaj neto plaću radnika koji ima bruto plaću 2180 €, osobni odbitak 900 € te živi u:

a) Zagrebu (23 %)	b) Rijeci (22 %)	c) Valpovu (21 %)	d) Velikoj Gorici (20 %)
e) Samoboru (18 %).			

Kako visina poreza na dohodak utječe na visinu neto plaće?
20. Ivka ima bruto plaću u iznosu od 1900 €, živi u Dubrovniku gdje je stopa poreza na dohodak od 20 % i ima prijavljenog oca za poreznu olakšicu. Koliko iznosi Ivkina neto plaća?
21. Marin ima bruto plaću u iznosu od 1500 €, živi u Karlovcu gdje je stopa poreza na dohodak 19 % i ima prijavljeno jedno dijete kao poreznu olakšicu na poreznoj kartici. Koliko iznosi Marinova neto plaća?
22. Obrtnik je zaposlio pet majstora i sa svima je ugovorio istu bruto plaću u iznosu od 2100 €. Koliki je ukupni trošak obrtnika za plaće majstora?
23. Zdravka ima bruto plaću u iznosu od 1821.6 € u mjesecu u kojem je radila 184 radna sata. Koliko iznosi Zdravkina bruto satnica?
24. Dalibor ima bruto satnicu 10.5 €. Kolika je njegova bruto plaća ako je u tom mjesecu imao 168 radnih sati?

/5.3. Troškovi

25. Mala radionica ručno izrađuje sapune. Za jedan sapun koriste se sirovine (ulja, boje, mirisi) u iznosu od 1.20 €, ambalaža i etiketa u iznosu od 0.40 €, rad u vidu 2 radna sata u iznosu 6 € bruto po satu, a dodatni troškovi (struja, voda, amortizacija) po sapunu iznose 0.50 €. Izračunaj ukupni trošak izrade jednog sapuna.

26. Obrtnik Marko popravlja bicikle. Za jedan popravak račun materijal (ulje, kočione pločice) 8 €, 1 sat i 30 minuta rada po bruto satnici od 12 € po satu, režijske troškove po popravku (struja, alat, najam prostora) 5 €. Izračunaj ukupni trošak popravka jednog bicikla.

27. Za izradu poda potrebno je 30 m² parketa po cijeni od 22 €/m², 4 kg ljepljiva za parket po cijeni od 15 €/kg, 3 l laka za drvo po cijeni od 20 €/l, 6 kom. brusnog papira po cijeni od 2 €/kom. Izračunaj ukupne materijalne troškove izrade poda.

28. Za izradu betonskog zida potrebno je:

Materijal	Jed. mjere	Količina	Jedinična cijena (€)
cement	kg	50	0.10
pijesak	kg	200	0.05
šljunak	Kg	300	0.07
režijski troškovi	kg		100

Izračunaj ukupni trošak izrade betonskog zida ako je posao trajao 9 sati i 45 minuta, a bruto satnica radnika iznosi 13 €.

29. Krojački obrt mjesečno izrađuje 80 haljina. Fiksni troškovi obrta jesu strojevi i najam u iznosu od 600 € te režije u iznosu od 200 €. Varijabilni troškovi po haljini jesu tkanina i konac u iznosu od 7.00 € te dugmad i ukrasi u iznosu od 2.00 €.

- Izračunaj ukupne fiksne i varijabilne troškove.
- Koliki je ukupni trošak izrade jedne haljine?

30. Frizerski salon ima mjesečne fiksne troškove najma prostora u iznosu od 700 € te internet i režije u iznosu od 250 €. Varijabilni troškovi po klijentu jesu šampon i regeneratore u iznosu od 0.80 € te rukavice i jednokratni ogrtači u iznosu od 0.70 €. Salon u prosjeku primi 300 klijenata mjesečno.

- Izračunaj ukupne fiksne i varijabilne troškove.
- Ako broj klijenata poraste na 400, što se mijenja?



31. Pizzeria mjesečno ispeče 2500 pizza. Fiksni mjesečni troškovi iznose: najam i režije – 1400 €, održavanje peći i opreme – 200 €, paušal za online dostavnu platformu – 150 €. Varijabilni trošak po pizzi iznosi: tijesto, umak, sir, nadjev – 2.20 €, kutija i ubrusi – 0.30 €.

- Izračunaj ukupne fiksne, varijabilne i ukupne troškove.
- Koliki je prosječni trošak po pizzi?
- Koliki bi bio prosječni trošak po pizzi ako se ispeče 4000 pizza?

32. Ugostiteljski obrt kupio je industrijsku perilicu posuđa po cijeni od 3570 €. Planira ga upotrebljavati 4 godine. Izračunaj godišnji iznos amortizacije. Kolika je knjigovodstvena vrijednost stroja nakon jedne godine korištenja?

33. Tvrtka kupuje sustav videonadzora za 1880 €. Upotrebljavat će ga 5 godina. Izračunaj godišnji iznos amortizacije.

34. Autoprijevoznik kupuje hladnjaču nabavne vrijednosti 42 000 €. Ako je godišnja stopa amortizacije 12.5 %, koliki je pretpostavljeni vijek trajanja i godišnji iznos amortizacije?

35. Obitelj Smolčić uzgaja suncokret.

Po hektaru troše:

- sjeme u iznosu od 80 €
- 300 kg mineralnoga gnojiva po cijeni od 0.45 €/kg
- zaštitu (herbicidi i fungicidi) u iznosu od 90 €
- gorivo u iznosu od 70 €.

Utrošeno je 25 sati rada po bruto satnici od 9 €. Amortizacija sijačice i prskalice u iznosu je od 40 € te financijski trošak kamata iznosi 15 €. Izračunaj ukupni trošak uzgoja suncokreta na 2 ha.



36. CNC operater izrađuje plastične dijelove sa sljedećim troškovnikom za jedan komad:

- 0.3 kg materijala (plastika) po cijeni od 1.5 €/kg
- vrijeme rada stroja jest 8 minuta, stroj troši 0.2 €/h
- vrijeme rada operatera jest 5 minuta, bruto satnica iznosi 10 €/h
- ostali troškovi (hlađenje, strojni alat) iznose 0.5 € po komadu.

Stroj vrijedi 15 000 € s vijekom trajanja 5 godina i mjesečnom proizvodnjom od 1500 komada. Izračunaj ukupni trošak izrade jednog komada.

/5.4. Kalkulacije

37. Građevinski obrt Majstor postavlja keramičke pločice u kupaonici. Izračunaj veleprodajnu cijenu ako je trošak pločica 120 €, trošak ljepila i mase za fugiranje 20 €, trošak rada 60 € i trošak amortizacije 5 €, a zarada iznosi 25 % od ukupnog troška.
38. Obrtnik izrađuje betonski temelj uz trošak materijala u iznosu od 86 €, trošak rada u iznosu od 55 €, trošak amortizacije u iznosu od 6 €. Izračunaj veleprodajnu cijenu betonskog temelja ako zarada iznosi 20 % od ukupnog troška.
39. Nabavna cijena robe iznosi 420 €, a veleprodajna cijena iznosi 609 €. Izračunaj maržu i izrazi je kao postotak u odnosu na nabavnu cijenu.
40. Roba je imala osnovnu cijenu 780 €. Kupac je platio 468 € zahvaljujući ostvarenom popustu. Izračunaj koliki je postotak popusta kupac ostvario.
41. Veleprodajna cijena robe iznosi 1485 €. Izračunaj nabavnu cijenu robe ako je obračunata marža od 35 %.
42. Kupac je kupio trosjed veleprodajne cijene 862.42 € za koju mu je odobren rabat od 33 %. Koliko je kupac platio trosjed?
43. Troškovi izrade cappuccina iznose 2.88 €. Koliko iznosi maloprodajna cijena napitka ako zarada iznosi 1.73 € i obračunava se PDV po stopi od 13 %?
44. Trošak jedne kremšnite u slastičarnici iznosi 0.75 €. Izračunaj maloprodajnu cijenu kremšnite ako je zarada 136 %, a PDV na kremšnitu iznosi 13 %.
45. Izračunaj maloprodajnu cijenu jela *Sarma* ako je marža 130 %, PDV 13 %, a normativ materijala s cijenama:

Red. br.	Namirnica	Jed. mjere	Količina	Jedinična cijena (€)
1.	kiseli kupus	kg	120 g	1.50
2.	miješano mljeveno meso	kg	150 g	6.50
3.	riža	Kg	25 g	1.80
4.	luk	kg	30 g	1.20
5.	ulje	kg	10 g	2.50

46. Izračunaj maloprodajnu cijenu bureka sa sirom ako je marža 100 %, PDV 25 %, a normativ materijala s cijenama:

Red. br.	Namirnica	Jed. mjere	Količina	Jedinična cijena (€)
1.	brašno T-550	kg	0.220	0.63
2.	sol	kg	0.005	0.40
3.	sir svježi	Kg	0.140	5.50
4.	masnoća	kg	0.030	3.00

/5.5. Porezna prijava

47. Slikar je tijekom godine ostvario ukupne primitke u iznosu od 48 000 € te ukupne izdatke u iznosu 22 400 €. Slikar vodi poslovne knjige, ali nije u sustavu PDV-a. Uzdržava suprugu i dvoje djece. Predujmovi poreza na dohodak plaćeni su u iznosu od 4500 €. Živi u Osijeku koji ima stopu poreza na dohodak od 20 %. Izračunaj razliku za uplatu ili povrat godišnjeg poreza na dohodak.
48. Obrtnik iz Korčule tijekom godine ostvario je ukupne primitke bez PDV-a u iznosu od 254 000 € te ukupne izdatke bez PDV-a u iznosu 187 000 €. Obrtnik vodi poslovne knjige. Nema uzdržanih članova. Uplatio je 12 000 € predujma poreza na dohodak. Korčula ima stopu poreza na dohodak od 20 %. Izračunaj ima li obrtnik pravo na povrat poreza ili treba dodatno platiti.
49. Milan iz Dugog Sela (porezna stopa 20 %) zaposlio se u ožujku. Tijekom godine ostvario je primitak od plaće u iznosu 14 000 € iz koje su obračunati doprinosi u iznosu od 2800 € te dohodak iznosi 11 200 €. Platio je 1040 € poreza. Nema uzdržanih članova. Ostvaruje li Milan povrat poreza po poreznoj prijavi?
50. Obrtnik Igor Topolović iz Gospića (porezna stopa 22 %) tijekom godine ostvario je primitke iz više izvora. Ispunio je tablicu na temelju podataka iz potvrda koje su mu dostavili isplatelji i iz poslovnih knjiga koje vodi kao obrtnik.

Izvor primitka (dohotka)	Primitak (€)	Obvezni doprinosi (€)	Dohodak (€)	Uplaćeni porez na dohodak (€)
obrt			70 000	11 800
plaća	3000	600	2400	264
drugi dohodak	1000	100	900	198

Obrtnik uzdržava suprugu Maju i kćer Tenu. Izradi njegovu godišnju prijavu poreza na dohodak popunjavanjem obrasca DOH te izračunaj razliku poreza za uplatu ili povrat.



UČENJE TEMELJENO NA RADU

Projektni zadatak

Vlasnik/vlasnica si obrta.

- a) Odredi proizvod koji prodaješ te napravi popis materijala za izradu i troškovnik po proizvodu.
- b) Odredi koliko radnika radi u obrtu, njihove bruto i neto plaće te ukupni mjesečni trošak obrta.
- c) Izradi popis imovine potrebne za obavljanje djelatnosti, odredi njihovu nabavnu vrijednost, vijek trajanja, godišnju amortizaciju te mjesečni iznos amortizacije.
- d) Odredi koliko ćeš mjesečno prodati svojih proizvoda pa izračunaj veleprodajnu i maloprodajnu cijenu vodeći računa o materijalnim troškovima, troškovima rada, amortizaciji, marži (zaradi) te PDV-u.
- e) Svoju mjesečnu zaradu možeš uložiti u oročenu štednju, državne obveznice ili neki fond pa izračunaj koji će ti prinos (kamat) donijeti.

Projektni zadatak treba izraditi u digitalnom alatu za prezentiranje.



MATEMATIKA ZA ČETVEROGODIŠNJE STRUKOVNE ŠKOLE



Udžbenik *Matematika 2* nudi strukturiran i motivirajući pristup s jasnim objašnjenjima i bogatim primjerima olakšavajući učenicima usvajanje gradiva i samostalno rješavanje zadataka. Za naprednije učenike udžbenik nudi složenije zadatke i pripremne vježbe za državnu maturu osiguravajući cjelovitu pripremu za daljnje obrazovanje.

Sadržaj je prilagođen specifičnim potrebama učenika strukovnih škola, s logičkim slijedom lekcija i zadatacima koji povezuju teoriju s praktičnom primjenom u stvarnom svijetu. Takav pristup omogućuje učenicima razvoj praktičnih vještina i znanja relevantnih za njihove buduće karijere, bez obzira na odabrani strukovni smjer, čime se osigurava njihova spremnost za profesionalni uspjeh.



Udžbenik je organiziran u 8 poglavlja:

1. Kvadratna jednadžba
2. Funkcije
3. Kvadratna funkcija
4. Kružnica i krug
5. Trigonometrija
6. Geometrija prostora
7. Vjerojatnost
8. Skup kompleksnih brojeva (izborni ishod)



Matematika 2

Autorski tim: dr. sc. Ružica Soldo, Ivan Benić, Melita Crnković i Damir Bešić



matematika

Temeljno načelo udžbenika – integrirani zadatci kao temelj učenja

Metodičko oblikovanje udžbenika utemeljeno je na načelu uparivanja primjera i zadataka, čime se postiže usmjerenost učenika na razmatrani koncept. Takav pristup analizom, promišljanjem i primjenom vodi i usmjerava učenika prema višim razinama kognitivne zahtjevnosti.

Udžbenik je oblikovan prema zahtjevima strukovnog obrazovanja i usmjeren na primjenu matematike u različitim područjima svakodnevnog i profesionalnog života. Nastavne cjeline metodički pomažu učeniku ostvariti ishode predviđene kurikulumom, a svaka nastavna jedinica slijedi jasno strukturiran put: prisjećanje relevantnih za novu lekciju, motivacijski primjer kojim se uvodi novi koncept na konkretnom modelu, a zatim slijedi prikaz njegovog teorijskog utemeljenja potkrijepljen riješenim primjerima.

Usklađen je s modernim pristupom kurikulu, diferenciranim poučavanjem i formativnim vrednovanjem, čime je učenik stavljen u središte poučavanja i njegov je aktivni sudionik.

Osim toga udžbenik nudi **tri dodatne razine provjere:**

Provjeri svoje znanje – interaktivni kviz za samoprocjenu

Zadatci za ponavljanje – sustavno ponavljanje na kraju svake cjeline

Želim na maturu! – zadatci u formatu državne mature čime osiguravamo cjelovitu pripremu za daljnje obrazovanje.

METODIČKA STRUKTURA SVAKOG POGLAVLJA

Prisjeti se! Uvodni zadatci u svakoj jedinici svrsishodno su osmišljeni za aktiviranje prethodnog znanja i pripremu učenika za nove koncepte osiguravajući čvrst temelj za nadogradnju znanja.

Izazov! Svaka jedinica uključuje skup zadataka veće složenosti koji potiču učenike na dublje promišljanje i razvoj vještina rješavanja problema, a namijenjeni su onima koji žele dodatno produbiti svoje znanje.

Zanimljivost! Rubrika koja povezuje matematičke koncepte s njihovom primjenom u znanosti i svakodnevnom životu ili s povijesnim kontekstom, čime se povećava relevantnost gradiva i motivacija učenika.

Zadatci za ponavljanje. Klasični zadatci za ponavljanje na kraju svake cjeline omogućuju učenicima sustavno ponavljanje gradiva i kvalitetnu pripremu za provjere znanja.

Provjeri svoje znanje. Nakon obrade sadržaja učenici imaju na raspolaganju interaktivni kviz s pitanjima i ponuđenim odgovorima, a dizajniran je za samoprocjenu usvojenosti gradiva i identifikaciju područja za dodatni rad.

Želim na maturu! Sadrži tipove zadataka koji se pojavljuju na državnoj maturi pružajući učenicima uvid u format i zahtjevnost ispita te ciljanu pripremu.

Na kraju udžbenika nalaze se **rješenja svih zadataka iz svih poglavlja**, što učenicima omogućuje samostalno provjeravanje svojih odgovora i razumijevanje postupaka rješavanja.



5.5. Primjena u planimetriji

PRISJETI SE!

1. Duljina stranice trokuta iznosi 12 cm, a duljina visine na tu stranicu 9 cm. Izračunaj površinu trokuta.
2. Duljine dviju stranica trokuta iznose 12 cm i 15 cm, a mjera kuta nasuprot duljoj stranici iznosi 80°. Izračunaj mjeru kuta nasuprot kraćoj stranici.
3. Duljine dviju stranica trokuta iznose 12 cm i 15 cm, a mjera kuta između njih iznosi 80°. Izračunaj duljinu treće stranice trokuta.

Pri određivanju nepoznatih elemenata trokuta često ćemo primjenjivati kombinaciju poučka o sinusima i poučka o kosinusu. Jedan od čestih problema u matematici i različitim strukama jest računanje površine likova koji imaju oblik trokuta.

Prisjetimo se svih izraza za računanje površine trokuta koje smo dosad učili, a koji bi nam mogli biti korisni u različitim situacijama:

UPAMTI!

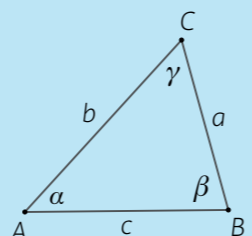
Neka je ABC trokut s oznakama kao na slici. Površinu trokuta možemo izračunati na jedan od sljedećih načina:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}, \text{ pri čemu je } v_a \text{ duljina visine na stranicu } a$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ pri čemu je } s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$P = r \cdot s, \text{ pri čemu je } r \text{ duljina polumjera trokutu upisane kružnice}$$

$$P = \frac{abc}{4R}, \text{ pri čemu je } R \text{ duljina polumjera trokutu opisane kružnice.}$$



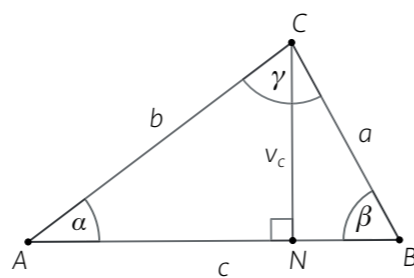
Primjenom trigonometrije u trokutu dokažimo još jednu formulu za računanje površine trokuta.

$$\text{U svakom trokutu vrijedi: } P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

U pravokutnom trokutu ANC sa slike vrijedi trigonometrijski omjer $\sin \alpha = \frac{v_c}{b}$, odnosno $v_c = b \cdot \sin \alpha$.

$$\text{Uvrstimo li to u polazni izraz za površinu, dobivamo } P = \frac{c \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Sukladno tomu mogu se izvesti i formule s drugim dvjema visinama u trokutu.



UPAMTI!

Površinu trokuta možemo računati kao polovinu umnoška duljina dviju stranica i sinusa kuta između njih, odnosno:

$$P = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2}$$

PRIMJER 1.

Sara u dvorištu izrađuje vrtnu gredicu u obliku trokuta. Postavila je dvije grede duljina 4.5 metara i 6 metara koje zatvaraju kut od 50°.

- a) Odredimo duljinu treće grede koju Sara treba postaviti kako bi dobila oblik trokuta.
- b) Odredimo površinu izrađene gredice.
- c) Unutar kružnice upisane vrtnoj gredici Sara želi posaditi začinsko bilje. Odredimo polumjer kružnice upisane trokutu koji označava vrtnu gredicu.
- d) Sara želi postaviti kružni sustav navodnjavanja oko svoje gredice. Odredimo duljinu polumjera trokutu opisane kružnice kako bismo izračunali koliko je cijevi potrebno nabaviti za navodnjavanje.

✓ Rješenje:

Situaciju možemo vizualizirati pomoću trokuta kojem su zadane duljine dviju stranica te mjera kuta između njih.

- a) Primjenom poučka o kosinusu računamo duljinu treće grede:

$$x^2 = 4.5^2 + 6^2 - 2 \cdot 4.5 \cdot 6 \cdot \cos 50^\circ \approx 21.5395$$

$$x \approx 4.64 \text{ m}$$

- b) Duljine dviju stranica trokuta i mjera kuta između njih dovoljne su nam i za računanje površine:

$$P = \frac{4.5 \cdot 6 \cdot \sin 50^\circ}{2} \approx 10.34 \text{ m}^2$$

- c) Duljinu polumjera trokutu upisane kružnice i površinu trokuta povezuje formula $P = r \cdot s$

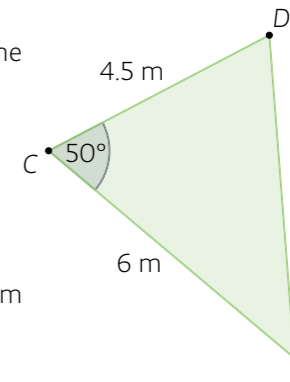
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4.5+6+4.64}{2} = 7.57 \text{ m}$$

$$10.34 = r \cdot 7.57 \Rightarrow r = \frac{10.34}{7.57} \approx 1.37 \text{ m}$$

- d) Duljinu polumjera trokutu opisane kružnice i površinu trokuta povezuje formula $P = \frac{abc}{4R}$ iz čega slijedi:

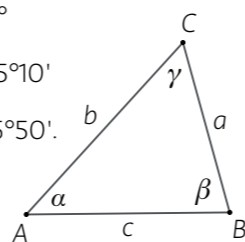
$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{4.5 \cdot 6 \cdot 4.64}{4 \cdot 10.34} \approx 3.03 \text{ m}$$

Duljina cijevi koju je potrebno nabaviti jest opseg kružnice $o = 2R\pi = 2 \cdot 3.03 \cdot \pi \approx 19.04 \text{ m}$.



ZADATAK 1. Zadan je trokut ABC s oznakama kao na slici. Izračunaj površinu trokuta ako je zadano:

- a) $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 60^\circ$ b) $b = 11.2$ cm, $c = 13.4$ cm, $\alpha = 72^\circ$
 c) $a = 4.15$ cm, $c = 6$ cm, $\beta = 42^\circ 15'$ d) $a = 72$ mm, $b = 0.86$ dm, $\gamma = 75^\circ 10'$
 e) $b = 0.08$ m, $c = 80$ mm, $\alpha = 56^\circ 56'$ f) $a = 1.26$ dm, $b = 0.158$ m, $\gamma = 75^\circ 50'$



ZADATAK 2. Duljine dviju stranica trokuta iznose 6.4 cm i 8.2 cm, a mjera kuta između njih 60° .

- a) Izračunaj površinu trokuta. b) Izračunaj duljinu polumjera trokutu opisane kružnice.
 c) Izračunaj duljinu polumjera trokutu upisane kružnice.

ZADATAK 3. Duljine dviju stranica trokuta iznose 72 mm i 1 dm, a mjera kuta između njih $75^\circ 15'$.

- a) Izračunaj površinu trokuta. b) Izračunaj duljinu polumjera trokutu opisane kružnice.
 c) Izračunaj duljinu polumjera trokutu upisane kružnice.

ZADATAK 4. Vrtlar želi posaditi cvijeće na gredici oblika trokuta čije su dvije stranice duge 12 m i 9 m, a zatvaraju kut mjere 45° . Kolika je površina cvjetne gredice?

ZADATAK 5. Zidari izrađuju betonsku ploču u obliku trokuta. Dvije stranice ploče duljina su 4.8 m i 6.5 m, a mjera kuta između njih 80° .

- a) Kolika je površina betonske ploče?
 b) Unutar betonske ploče postavlja se dekorativni element kružnog oblika koji dodiruje sva tri ruba ploče. Izračunaj površinu tog dekorativnog elementa.

ZADATAK 6. Zastava ima oblik trokuta sa stranicama duljina 1.2 m i 1.6 m koje zatvaraju kut mjere 35° .

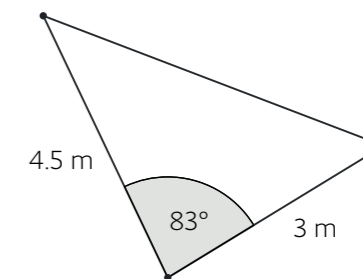
- a) Kolika je površina zastave?
 b) Izračunaj duljinu polumjera kružne podloge na koju želimo zalijepiti zastavu tako da zastava bude upisana u podlogu.

ZADATAK 7. Na moru je primijećeno naftno onečišćenje u obliku trokuta. Kako bi stručnjaci utvrdili razmjernost ekocida, iz luke su isplovila dva broda. Prvi je brod prešao 2.5 kilometra u smjeru istoka, a drugi 1.9 kilometra pod kutom od 40° u odnosu na prvi brod.

- a) Koliko su brodovi međusobno udaljeni?
 b) Kolika je površina mora onečišćena?

ZADATAK 8. Keramičar popločava površinu čiji je tlocrt prikazan na skici.

- a) Kolika je površina koju je potrebno popločati?
 b) Koliko je paketa pločica potrebno ako jedan paket sadrži 1.44 m² pločica?



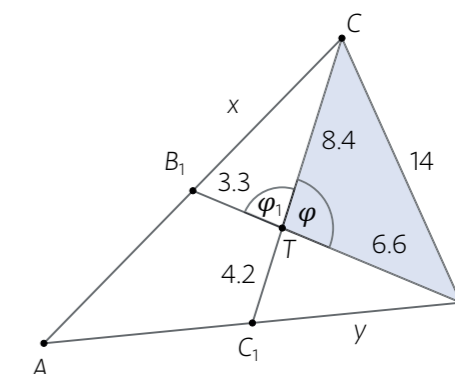
ZADATAK 9. Samanta posjeduje vrt oblika trokuta čije su dvije stranice duljina 12 metara i 9 metara, a mjera kuta između njih je 55° .

- a) Izračunaj površinu vrta.
 b) Koliko sadnica lavande može posaditi ako se na svakih 0.4 m² površine vrta sadi jedna sadnica?

PRIMJER 2.

Duljina stranice a trokuta ABC iznosi 14 cm. Duljine dviju težišnica nacrtanih na stranice b i c iznose $t_b = 9.9$ cm i $t_c = 12.6$ cm.

- a) Odredimo mjeru kuta između težišnica.
 b) Odredimo duljine preostalih stranica trokuta.



✓ **Rješenje:**

Prisjetimo se – **težišnica trokuta** jest dužina koja spaja vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice. Težišnice se sijeku u težištu, a težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$ gledajući od vrha trokuta.

a) Kako bismo odredili mjeru kuta φ između težišnica, poslužiti ćemo se trokutom BTC kojem su poznate duljine svih triju stranica.

$$|BT| = \frac{2}{3}t_b = \frac{2}{3} \cdot 9.9 = 6.6 \text{ cm}$$

$$|TC| = \frac{2}{3}t_c = \frac{2}{3} \cdot 12.6 = 8.4 \text{ cm}$$

Mjeru kuta φ računamo primjenom poučka o kosinusu:

$$\cos \varphi = \frac{8.4^2 + 6.6^2 - 14^2}{2 \cdot 8.4 \cdot 6.6} = -\frac{2047}{2772}$$

$$\varphi = 137^\circ 36'$$

Mjeru kuta φ_1 računamo $\varphi_1 = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 137^\circ 36' = 42^\circ 24'$.

Primjenom poučka o kosinusu na trokut B_1TC u kojem su poznate duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računamo stranicu duljine x :

$$x^2 = 3.3^2 + 8.4^2 - 2 \cdot 3.3 \cdot 8.4 \cdot \cos 42^\circ 24' \approx 40.51$$

$$x \approx 6.36 \text{ cm}$$

Duljina x polovina je duljine stranice \overline{AC} pa slijedi $|\overline{AC}| = 2 \cdot 6.36 = 12.72 \text{ cm}$.

U trokutu C_1BT računamo stranicu duljine y :

$$y^2 = 6.6^2 + 4.2^2 - 2 \cdot 6.6 \cdot 4.2 \cdot \cos 42^\circ 24' \approx 20.26 \text{ cm}$$

$$y \approx 4.5 \text{ cm}$$

Duljina y polovina je duljine stranice \overline{AB} pa slijedi $|\overline{AB}| = 2 \cdot 4.5 = 9 \text{ cm}$.

ZADATAK 10. Duljina stranice c trokuta ABC iznosi 21 cm. Duljine dviju težišnica, na stranice a i b , iznose $t_a = 15 \text{ cm}$ i $t_b = 18 \text{ cm}$. Odredi mjeru kuta između težišnica.

ZADATAK 11. Duljina stranice b trokuta ABC iznosi 17 cm. Duljine dviju težišnica, na stranice a i c , iznose $t_a = 12 \text{ cm}$ i $t_c = 18 \text{ cm}$.

- a) Odredi mjeru kuta između težišnica. b) Odredi opseg trokuta.

ZADATAK 12. Duljina stranice a trokuta ABC iznosi 14.6 cm. Duljine dviju težišnica, na stranice a i b , iznose $t_a = 9.3 \text{ cm}$ i $t_b = 12.9 \text{ cm}$.

- a) Odredi mjeru kuta između težišnica. b) Odredi duljine preostalih stranica trokuta.

PRIMJER 3.

Duljine dijagonala paralelograma iznose 18 cm i 26 cm, a mjera kuta između dijagonala jest 98° . Odredimo duljine stranica paralelograma.

✓ Rješenje:

Podsjetimo se – **paralelogram** je četverokut kojem su nasuprotne stranice paralelne i jednake duljine. Nasuprotni kutovi paralelograma jednakih su mjera. Zbroj mjera kutova uz istu stranicu (susjedni kutovi) iznosi 180° . Dijagonale paralelograma međusobno se raspolavljaju.

Skicirajmo paralelogram s podacima iz primjera.

U trokutu ABS zadane su duljine dviju stranica te mjera kuta između njih. Primjenom poučka o kosinusu računamo duljinu stranice a .

$$a^2 = 13^2 + 9^2 - 2 \cdot 13 \cdot 9 \cdot \cos 98^\circ \approx 282.5665$$

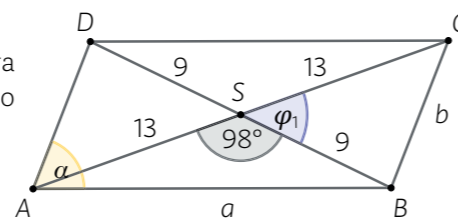
$$a \approx 16.81 \text{ cm}$$

Za mjeru kuta φ_1 vrijedi $\varphi_1 = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

Primjenom poučka o kosinusu u trokutu SBC računamo duljinu stranice b .

$$b^2 = 9^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 9 \cdot \cos 82^\circ \approx 217.4335$$

$$b \approx 14.75 \text{ cm}$$



UOČI!

Dijagonala dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta. Ako α označimo šiljasti kut paralelograma, tada iz formule za površinu trokuta možemo izračunati i površinu paralelograma.

$$P = 2 \cdot \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2} = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

ZADATAK 13. Duljine dijagonala paralelograma iznose 32 cm i 24 cm, a mjera kuta između dijagonala jest 62° . Odredi duljine stranica paralelograma.

ZADATAK 14. Duljine stranica paralelograma iznose 10 cm i 14 cm, a mjera šiljastog unutarnjeg kuta jest 58° . Odredi duljine dijagonala paralelograma.

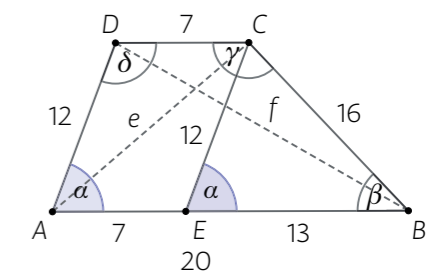
ZADATAK 15. Duljine stranica paralelograma iznose 14.2 cm i 9.4 cm, a duljina kraće dijagonale 11 cm. Odredi:

- a) mjere unutarnjih kutova paralelograma b) duljinu dulje dijagonale paralelograma
c) površinu paralelograma.

PRIMJER 4.

Duljine stranica trapeza $ABCD$ iznose: $a = 20 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$, $d = 12 \text{ cm}$.

- a) Odredimo mjere unutarnjih kutova trapeza.
b) Odredimo duljine dijagonala trapeza.



✓ Rješenje:

Prisjetimo se – **trapez** je četverokut s jednim parom paralelnih stranica koje se nazivaju osnovice, a preostale dvije stranice nazivaju se krakovi. Zbroj mjera kutova **uz isti krak** u trapezu iznosi 180° . Ako su osnovice trapeza a i c , a v njegova visina, tada površina trapeza iznosi $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$.

a) Skicirajmo trapez s podacima iz primjera. Nacrtajmo paralelu sa stranicom AD koja prolazi vrhom C . Na taj smo način podijelili trapez na paralelogram i trokut. Uočimo da su u trokutu EBC poznate duljine svih triju stranica, pa primjenom poučka o kosinusu računamo mjeru kuta α .

$$\cos \alpha = \frac{12^2 + 13^2 - 16^2}{2 \cdot 12 \cdot 13} = \frac{19}{104}$$

$$\alpha = 79^\circ 28' 24''$$

Iz istog trokuta računamo i mjeru kuta β : Sada možemo izračunati i mjere preostalih dvaju kutova trokuta:

$$\cos \beta = \frac{16^2 + 13^2 - 12^2}{2 \cdot 16 \cdot 13} = \frac{281}{416}$$

$$\beta = 47^\circ 30' 31''$$

$$\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 47^\circ 30' 31'' = 132^\circ 29' 29''$$

$$\delta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 79^\circ 28' 24'' = 100^\circ 31' 36''$$

b) Nakon što smo izračunali unutarnje kutove trapeza, duljine dijagonala možemo računati primjenom poučka o kosinusu.

U trokutu ABC vrijedi:

$$e^2 = 20^2 + 16^2 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot \cos 47^\circ 30' 31'' \approx 223.6923$$

$$e = 14.96 \text{ cm}$$

U trokutu ABD vrijedi:

$$f^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos 79^\circ 28' 24'' \approx 456.3073$$

$$f = 21.36 \text{ cm}$$

ZADATAK 16. Duljine osnovica trapeza iznose $a = 21 \text{ cm}$ i $c = 14 \text{ cm}$. Mjere kutova uz dulju osnovicu iznose $\alpha = 70^\circ$ i $\beta = 55^\circ$. Odredi duljine dijagonala trapeza.

ZADATAK 17. Jelica posjeduje zemljište oblika trapeza kojem su duljine osnovica 55 m i 27 m . Mjere kutova uz osnovicu iznose $\alpha = 76^\circ$ i $\beta = 48^\circ 30'$.

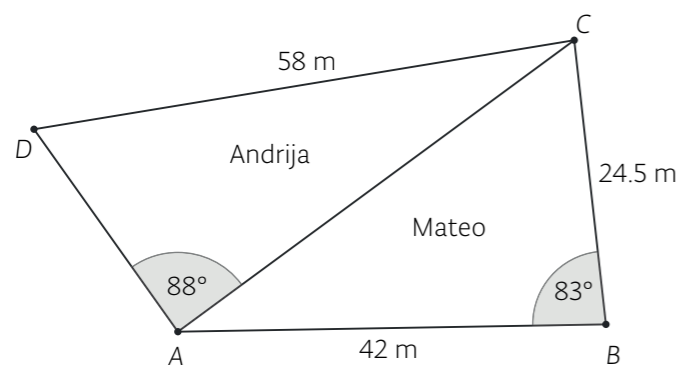
- Kolika je površina zemljišta?
- Kolika je duljina ograde potrebna Jelici za ograđivanje zemljišta?

ZADATAK 18. Duljine osnovica trapeza iznose 10.4 cm i 4.8 cm , a duljine krakova 8.6 cm i 5.4 cm .

- Odredi mjere kutova u trapezu.
- Odredi duljine dijagonala.
- Izračunaj površinu trapeza.

PRIMJER 5.

Andrija i Mateo podijelili su zemljište oblika četverokuta $ABCD$ na dva zemljišta oblika trokuta s dimenzijama kao na skici. Odredimo tko ima zemljište veće površine.



✓ Rješenje:

Površinu trokuta ABC koji označava Mateovo zemljište možemo izračunati jer su poznati podatci o duljinama dviju stranica i o mjeri kuta između njih.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{24.5 \cdot 42 \cdot \sin 83^\circ}{2} \approx 510.66 \text{ m}^2$$

Za računanje površine trokuta ACD najprije odredimo duljinu stranice AC .

$$|AC|^2 = 42^2 + 24.5^2 - 2 \cdot 42 \cdot 24.5 \cdot \cos 83^\circ \approx 2113.44$$

$$|AC| \approx 45.97 \text{ m}$$

U trokutu ACD poznate su duljine dviju stranica i mjera kuta nasuprot duljoj, pa možemo primijeniti poučak o sinusima za računanje mjere kuta $\sphericalangle CDA$, pri vrhu D , označimo ga δ .

$$\frac{45.97}{\sin \delta} = \frac{58}{\sin 88^\circ}$$

$$58 \cdot \sin \delta = 45.97 \cdot \sin 88^\circ$$

$$\sin \delta = \frac{45.97 \cdot \sin 88^\circ}{58} \approx 0.7921$$

$$\delta = 52^\circ 22' 57''$$

Sada možemo izračunati i mjeru kuta pri vrhu C u trokutu ACD , označimo ga γ .

$$\gamma = 180^\circ - 88^\circ - 52^\circ 22' 57''$$

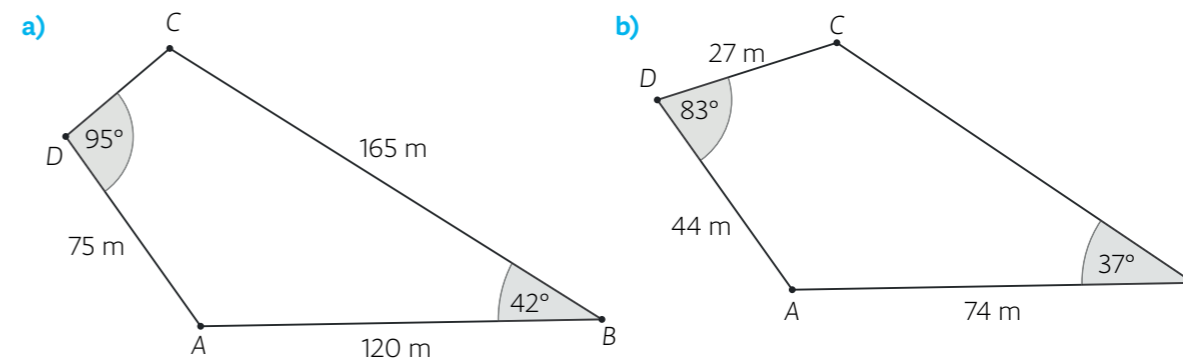
$$\gamma = 39^\circ 37' 3''$$

Konačno računamo površinu trokuta ACD .

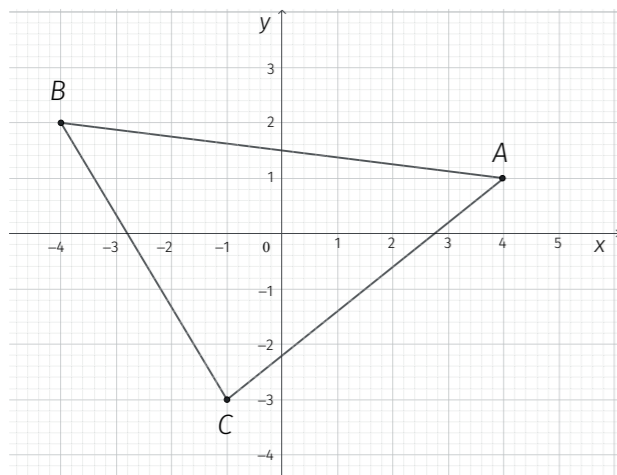
$$P_{\Delta ACD} = \frac{58 \cdot 45.97 \cdot \sin 39^\circ 37' 3''}{2} \approx 850.08 \text{ m}^2$$

Zaključujemo da Andrija ima zemljište veće površine.

ZADATAK 19. Izračunaj površinu četverokuta $ABCD$ sa slike.

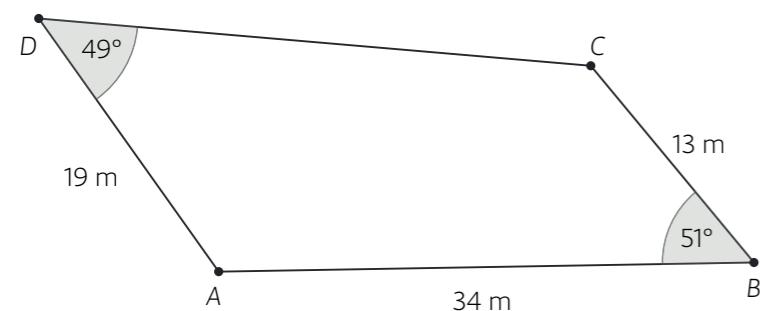


ZADATAK 20. Zadan je trokut u koordinatnom sustavu.

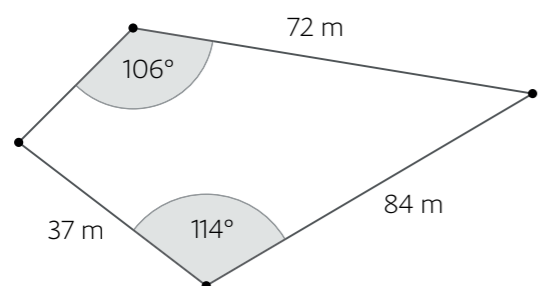


- Odredi duljine stranica trokuta.
- Odredi mjeru najvećeg kuta u trokutu.
- Izračunaj površinu trokuta.

ZADATAK 21. Anita posjeduje zemljište oblika četverokuta kao na slici u koji želi posaditi sadnice jabuka. Koliko sadnica jabuka Anita može posaditi na zemljištu ako se jedna sadnica sadi na 6 m^2 zemljišta?

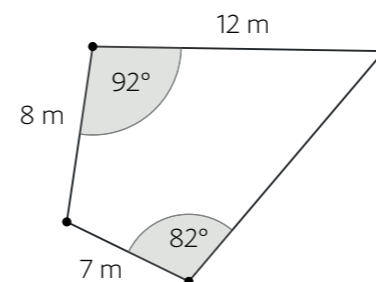


ZADATAK 22. Aleksandar kupuje ogradu za pašnjak čiji je tlocrt prikazan na slici.



- Koliko metara ograde Aleksandar treba kupiti?
- Koliko kilograma trave Aleksandar treba kupiti za obnavljanje travnjaka ako se preporučuje sijanje 1 kg trave na 35 m^2 površine?

ZADATAK 23. Janja uređuje dvorište tlocrtnog oblika kao na slici i prekrila bi ga betonskim pločicama. Pripremu terena i postavljanje opločnika majstori će naplatiti 45 € po m^2 te dodatno postavljanje betonskih rubnjaka po cijeni od 12 € za dužni metar. Koliko će Janja platiti radove na dvorištu?



IZAZOV! Istraži stvarne katastarske čestice (zemljišne parcele) u svojoj okolini ili katastarske čestice koje posjeduje tvoja obitelj.

- Pronađi katastarsku česticu putem javno dostupnih izvora (npr. Geoportal, katastar.hr).
- Prikaži je kao geometrijski lik (npr. trokut ili četverokut podijeljen na dva trokuta).
- Zapiši zadane podatke (duljine međa, mjere kutova). Ako nemaš točne podatke, pretpostavi realne vrijednosti prema mjerilu karte.
- Izračunaj duljine nepoznatih stranica zemljišta te mjere kutova.
- Izračunaj ukupnu površinu katastarske čestice.
- Usporedi svoj rezultat s površinom navedenom u službenom katastru (ako je dostupna).

ZANIMLJIVOST! Johannes Müller, poznat kao Regiomontanus (1436. – 1476.), bio je njemački matematičar i astronom koji je odigrao ključnu ulogu u transformaciji trigonometrije iz praktične astronomske metode u samostalnu geometrijsku disciplinu. Iako je trigonometrija nastala iz potrebe za rješavanjem astronomskih problema, Regiomontanus ju je predstavio kao čistu matematičku disciplinu. Autor je udžbenika trigonometrije *De triangulis omnimodis (O bilo kojim trokutima)* – prvog sustavnog djela o trigonometriji u Europi koje se ne oslanja izravno na astronomiju. Razvio je numeričke tablice koje omogućuju rješavanje trokuta pomoću proporcija, što je preteča današnjih trigonometrijskih funkcija.



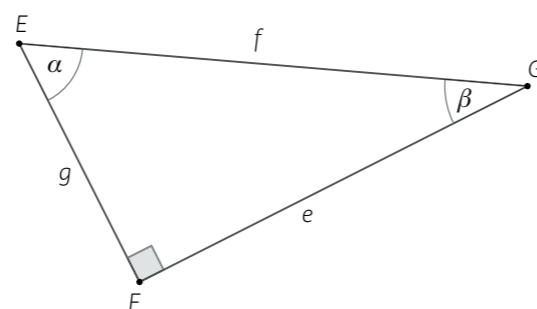
PROVJERI SVOJE ZNANJE

1. Omjer duljina priležeće katete kutu α i hipotenuze u pravokutnom trokutu jest:

- a) sinus kuta α b) kosinus kuta α c) tangens kuta α d) kotangens kuta α .

2. Koji trigonometrijski omjer vrijedi u trokutu sa slike?

- a) $\sin \alpha = \frac{g}{e}$ b) $\cos \beta = \frac{f}{e}$
 c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{e}$ d) $\cos \alpha = \frac{g}{f}$



3. Odredi mjeru šiljastog kuta α za koji vrijedi $\sin \alpha = 0.321$.

- a) $\alpha = 71^{\circ}16'$ b) $\alpha = 17^{\circ}48'$ c) $\alpha = 18^{\circ}43'$ d) $\alpha = 7^{\circ}4'$

4. Kako matematički interpretiramo prometni znak sa slike?

- a) na 100 metara horizontalne udaljenosti nadmorska visina povisi se za 10 metara.
 b) na 1 kilometar horizontalne udaljenosti nadmorska visina povisi se za 10 metara
 c) na 100 metara horizontalne udaljenosti nadmorska visina snizi se za 10 metara
 d) na 1 kilometar horizontalne udaljenosti nadmorska visina snizi se za 10 metara



5. Duljine kateta pravokutnog trokuta iznose $a = 9$ cm i $b = 14$ cm. Koliko iznosi mjera kuta nasuprot kraćoj kateti?

- a) $\alpha = 32^{\circ}44'$ b) $\alpha = 57^{\circ}16'$ c) $\alpha = 40^{\circ}$ d) $49^{\circ}59'$

6. Petra stoji 50 metara od zgrade koju promatra. Ako se vrh zgrade vidi sa zemlje pod kutom mjere 21° , koliko je visoka zgrada?

- a) 16 m b) 17 m c) 18 m d) 19 m

7. U jednakokračnom trokutu duljina osnovice iznosi $a = 14$ cm, a mjera kuta nasuprot osnovici 68° . Duljina visine na osnovicu iznosi:

- a) 4.72 cm b) 5.80 cm c) 8.44 cm d) 10.38 cm.

8. Duljina visine na krak jednakokračnog trokuta iznosi 4.5 cm, a mjera kuta nasuprot osnovici 74° . Duljina kraka iznosi:

- a) 1.24 cm b) 4.68 cm c) 15.69 cm d) 16.32 cm.

9. Dijagonale pravokutnika kojem su duljine stranica $a = 14$ cm i $b = 10$ cm zatvaraju kut mjere od približno:

- a) 36° b) 44° c) 71° d) 88° .

10. Duljine dijagonala romba iznose $e = 10$ cm i $f = 14$ cm. Mjera tupog kuta u rombu približno iznosi:

- a) 142° b) 109° c) 94° d) 88° .

11. Ako su trokutu zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih, duljinu treće stranice možemo izračunati pomoću:

- a) poučka o sinusima b) poučka o kosinusu c) Pitagorina poučka. d) Nije moguće odrediti.

12. Ako su trokutu zadane mjere dvaju kutova i duljina jedne stranice, duljinu druge stranice možemo izračunati pomoću:

- a) poučka o sinusima b) poučka o kosinusu c) Pitagorina poučka. d) Nije moguće odrediti.

13. Koja od navedenih formula za računanje površine **ne vrijedi za svaki trokut** ABC?

- a) $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$ b) $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ c) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ d) $P = \frac{ab}{2}$

14. U trokutu ABC duljine stranica iznose $a = 9.5$ cm, $b = 12.4$ cm, $c = 7.3$ cm. Najveću mjeru u trokutu ima kut:

- a) α b) β c) γ . d) Nije moguće odrediti.

15. Iz zadanog razmjera odredi duljinu stranice b : $\frac{6.5}{\sin 45^{\circ}} = \frac{b}{\sin 60^{\circ}}$.

- a) 4.59 b) 6.86 c) 7.96 d) 10.61

16. Duljine dviju stranica trokuta iznose $a = 8.6$ cm i $b = 10.4$ cm. Ako se nasuprot stranici b nalazi kut mjere $84^{\circ}15'$, odredi mjeru kuta nasuprot stranici a .

- a) $34^{\circ}38'$ b) $40^{\circ}35'$ c) $49^{\circ}25'$ d) $55^{\circ}22'$

17. Duljina polumjera trokutu opisane kružnice iznosi 6.5 cm, a duljina jedne stranice 5.5 cm. Koliko, zaokruženo na stupnjeve, iznosi mjera kuta nasuprot zadanoj stranici?

- a) 25° b) 32° c) 58° d) 65°

18. Duljine dviju stranica trokuta iznose 11 cm i 16 cm, a mjera kuta između njih 120° . Duljina treće stranice iznosi:

- a) 23.52 cm b) 21.56 cm c) 14.18 cm d) 8.49 cm.

19. Duljine dviju stranica trokuta iznose 12 cm i 16 cm, a mjera kuta između njih 135° . Koliko iznosi površina tog trokuta?

- a) 96 cm^2 b) 78.64 cm^2 c) 67.88 cm^2 d) 55.06 cm^2

20. Dvije ceste polaze iz istog raskrižja pod kutom od 70° . Duž jedne ceste nalazi se selo A, udaljeno 3 km od raskrižja, a duž druge ceste selo B udaljeno 4 km od raskrižja. Kolika je zračna udaljenost između sela A i B?

- a) 4.1 km b) 4.6 km c) 16.8 km d) 20.9 km

ZADATCI ZA PONAVLJANJE

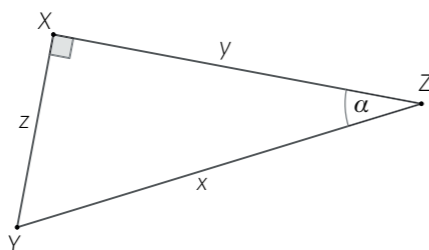
1. Koji trigonometrijski omjer vrijedi u trokutu na slici?

A. $\sin \alpha = \frac{z}{y}$

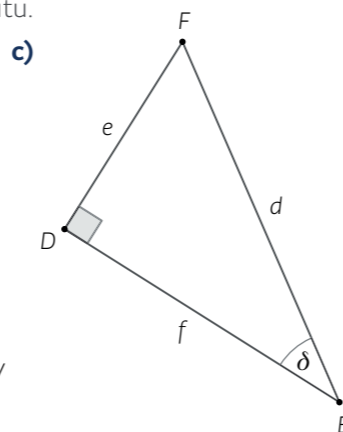
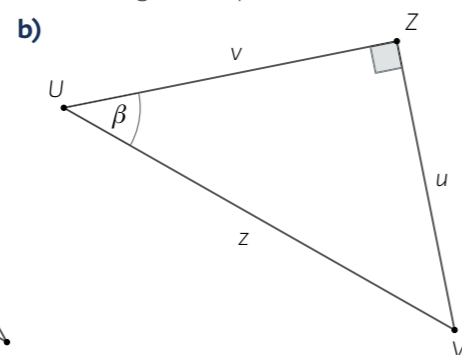
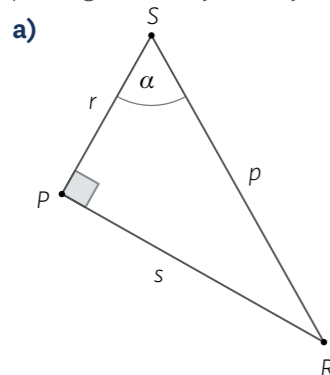
B. $\cos \alpha = \frac{y}{x}$

C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{x}$

D. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$



2. Zapiši trigonometrijske omjere istaknutog kuta u pravokutnom trokutu.



3. Prepiši tablicu u bilježnicu te izračunaj vrijednost trigonometrijskih omjera zadanih kutova zaokruženu na četiri decimalna mjesta.

kut α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$37^{\circ}15'$				
$42^{\circ}44'$				
$12^{\circ}14'16''$				
$54^{\circ}45'54''$				

4. Odredi mjeru šiljastog kuta α ako je:

a) $\sin \alpha = 0.6342$

b) $\cos \alpha = 0.7654$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 0.321$

d) $\operatorname{ctg} \alpha = 0.025$

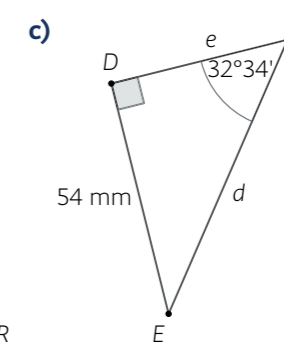
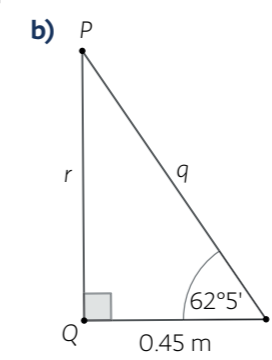
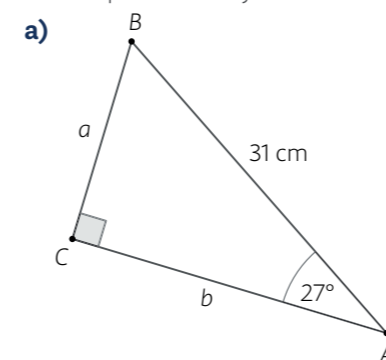
e) $\sin \alpha = 1.0042$

f) $\cos \alpha = 0.6675$

g) $\operatorname{tg} \alpha = 0.4445$

h) $\operatorname{ctg} \alpha = 0.264$

5. Odredi nepoznate duljine stranica pravokutnih trokuta sa slike.



6. Duljine kateta pravokutnog trokuta iznose 12 cm i 17 cm. Odredi mjeru manjeg šiljastog kuta.

7. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta iznosi 21 cm, a mjera kuta nasuprot kraćoj kateti $21^{\circ}21'$. Odredi površinu pravokutnog trokuta.

8. U pravokutnom trokutu mjera jednog šiljastog kuta iznosi 30° , a duljina hipotenuze 10 cm. Odredi duljine kateta pravokutnog trokuta.

9. Stepenice su dizajnirane tako da svaka ima visinu 18 cm i dubinu (širinu gazišta) 30 cm. Kolika je mjera kuta nagiba stepenica?

10. Ljestve duge 4 m naslonjene su na zid pod kutom od 60° u odnosu na tlo. Koliko je donji kraj ljestava udaljen od zida?

11. Žlijeb na krovu postavljen je pod nagibom od 1° . Za ukupnu duljinu žlijeba od 12 m odredi visinsku razliku između početne i završne točke.

12. Žičara prelazi planinski teren s visinskom razlikom od 300 metara i horizontalnom udaljenošću od 400 metara. Kolika je mjera kuta nagiba žičare?

13. Prometni znak sa slike prikazuje opasnu uzbrdicu. Kolika je mjera kuta nagiba takve ceste?



14. S vrha dizalice visoke 40 metara automobil se vidi pod kutom depresije od 25° . Kolika je udaljenost automobila od podnožja dizalice?

15. S vrha zgrade visoke 25 metara vidi se vrh susjedne zgrade pod kutom elevacije od 10° . Kolika je visina susjedne zgrade ako su zgrade horizontalno udaljene 50 metara?

16. S kontrolnog tornja visokog 80 metara promatra se zrakoplov pod kutom elevacije od 20° . Ako je zrakoplov na visini od 2 kilometra, kolika je udaljenost zrakoplova od kontrolnog tornja?

17. Neka je u jednakokrtačnom trokutu a duljina osnovice, b duljina kraka, v_a duljina visine na osnovicu, α mjera kuta nasuprot osnovici, β mjera kuta uz osnovicu. Izračunaj elemente jednakokrtačnog trokuta koji nedostaju ako je:

- a) $a = 12$ cm, $\beta = 48^\circ 15'$ b) $b = 15.4$ cm, $\beta = 28^\circ 45'$
 c) $v_a = 10.55$ cm, $\alpha = 78^\circ 30'$ d) $a = 8.55$ cm, $v_a = 11$ cm.

18. Duljina visine na krak jednakokrtačnog trokuta iznosi 10.5 cm. Ako je mjera kuta nasuprot osnovici 85° , odredi:

- a) duljinu osnovice b) duljinu kraka c) površinu trokuta.

19. Duljina visine na krak jednakokrtačnog trokuta iznosi 25 cm. Ako je mjera kuta uz osnovicu 56° , odredi opseg trokuta.

20. Na mostu se nalazi stup visine 20 m, s čijeg se vrha spuštaju dva jednako duga kabela do tla s objiju strana stupa. Kut između kabela iznosi 70° .

- a) Izračunaj duljinu svakog kabela.
 b) Izračunaj duljinu razmaka između točaka na tlu gdje su kabela pričvršćeni.

21. Vidikovac ima pristupne staze koje s podnožjem brda čine jednakokrtačni trokut čija je osnovica 50 metara. Vidikovac je 25 metara iznad podnožja.

- a) Kolika je duljina svake staze?
 b) Pod kojim se kutom u vrhu spajaju staze?

22. U gradski je park postavljen jarbol čiji je vrh s dviju strana učvršćen konopom za zemlju tako da konop sa zemljom čini jednakokrtačni trokut. Ako je ukupna duljina konopa 10 metara, a pričvršćen je za zemlju u dvjema točkama koje su međusobno udaljene 12 metara, odredi visinu jarbola te kut pod kojim konopi zatvaraju vrh jarbola.

23. Pod kojim se kutom sijeku dijagonale bilijarskog stola dimenzija 205 cm \times 105 cm?

24. Kut između dijagonala pravokutnika iznosi 75° . Ako je duljina dulje stranice pravokutnika 25 cm, odredi:

- a) duljinu kraće stranice pravokutnika b) duljinu dijagonale.

25. Duljina stranice romba iznosi 10 cm, a mjera tupog kuta 108° . Izračunaj površinu romba.

26. Duljina stranice romba iznosi 5.4 cm, a mjera šiljastog kuta iznosi 42° . Odredi:

- a) duljine dijagonala romba b) površinu romba.

27. Duljine dijagonala romba iznose 14 cm i 22 cm. Odredi:

- a) opseg romba b) mjeru šiljastog kuta.

28. Opseg romba iznosi 34.6 cm, a mjera šiljastog kuta iznosi $52^\circ 15'$. Odredi:

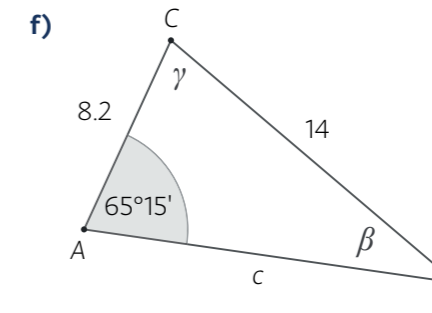
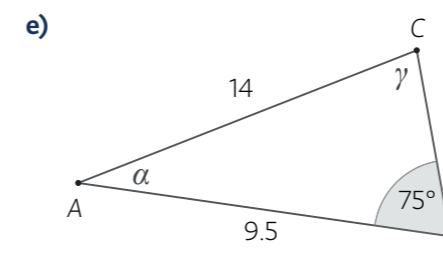
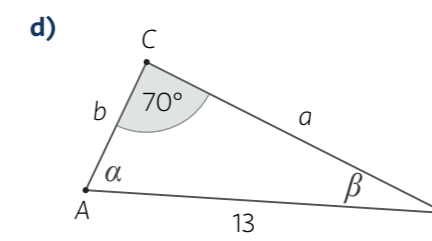
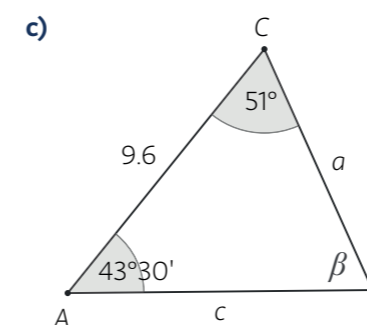
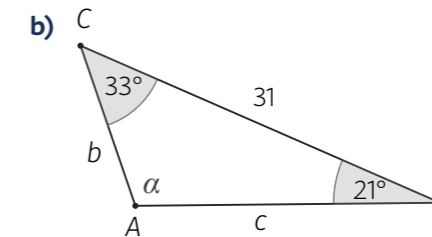
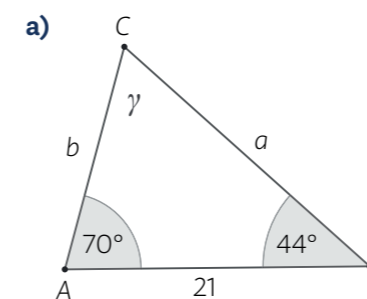
- a) duljinu visine romba b) površinu romba c) duljine dijagonala romba.

29. Odredi površinu pravilnog peterokuta koji je opisan kružnici polumjera 14 cm.

30. Odredi površinu pravilnog deseterokuta koji je opisan kružnici promjera 32 cm.

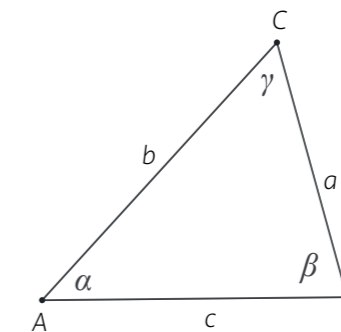
31. Odredi površinu pravilnog dvadeseterokuta koji je upisan kružnici polumjera 24 cm.

32. Odredi nepoznate elemente (duljine stranica, mjeru kuta) trokutima sa slike.



33. Neka je trokut ABC s oznakama kao na slici. Odredi nepoznate elemente trokuta (duljine stranica, mjere kutova) ako je zadano:

- a) $a = 28$ cm, $\alpha = 51^\circ$, $\beta = 68^\circ$
 b) $b = 13.5$ cm, $\alpha = 33^\circ$, $\beta = 71^\circ$
 c) $c = 18.25$ cm, $\alpha = 50^\circ 15'$, $\beta = 75^\circ 30'$
 d) $a = 18$ cm, $b = 14$ cm, $\alpha = 74^\circ$
 e) $b = 13.5$ cm, $c = 9.2$ cm, $\beta = 68^\circ$
 f) $c = 6.25$ cm, $b = 11.5$ cm, $\beta = 78^\circ 45'$



34. Mjere dvaju kutova trokuta jesu 45° i 68° . Duljina najdulje stranice trokuta iznosi 14.3 cm. Odredi duljinu najkraće stranice trokuta.

35. Mjere dvaju kutova trokuta jesu $42^\circ 15'$ i $62^\circ 55'$. Duljina najkraće stranice trokuta iznosi 11.5 cm. Odredi opseg trokuta.

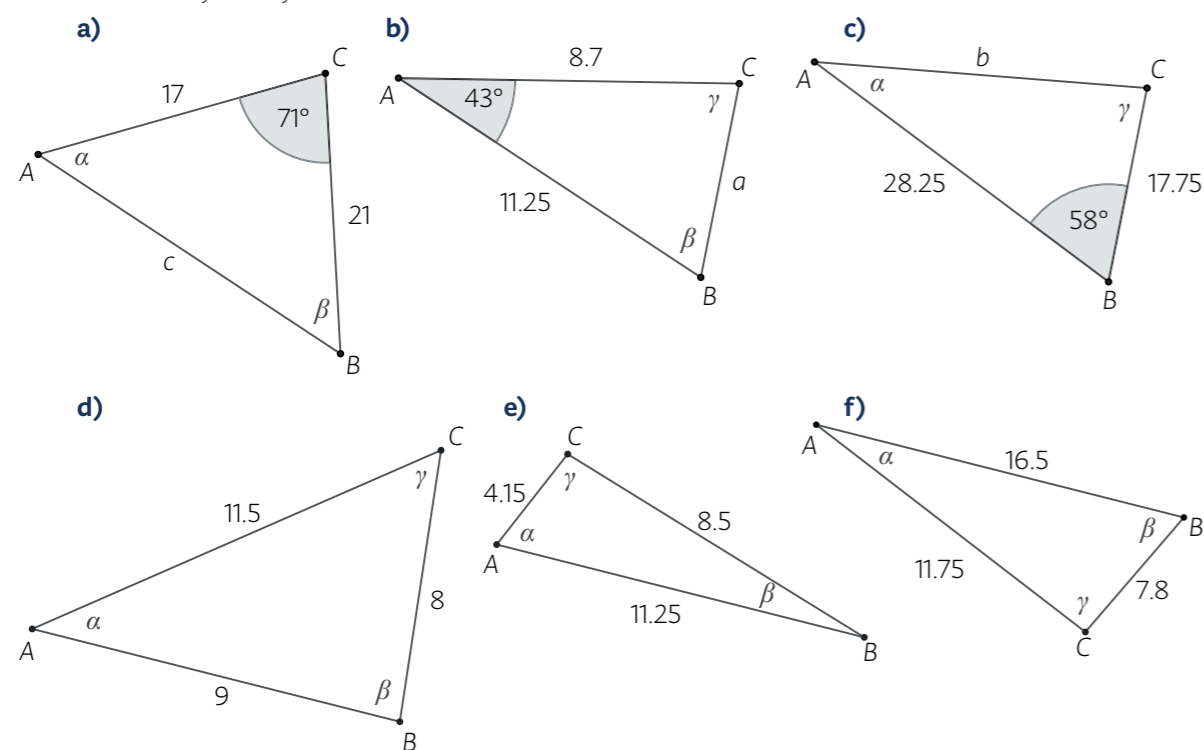
36. Mjere kutova u trokutu u omjeru su 4 : 5 : 9. Duljina najkraće stranice tog trokuta iznosi 11.4 cm. Odredi duljinu najdulje stranice trokuta.

37. Dva broda plove morem i međusobno su udaljena 3 nautičke milje. Svaki od njih vidi svjetionik pod različitim kutom u odnosu na liniju koja ih spaja: prvi pod kutom mjere 52°, a drugi pod kutom 76°. Kolika je udaljenost svjetionika od svakog broda?



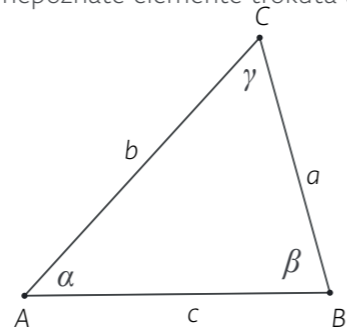
38. S dviju točaka na obali mora Petar i Simon, koji su međusobno udaljeni 120 metara, promatraju vrh svjetionika. Mjere kutova pod kojima vide vrh svjetionika iznose 51° i 62°. Koliko je Petar, a koliko Simon udaljen od vrha svjetionika?

39. Odredi nepoznate elemente (duljine stranica, mjere kutova) trokutima sa slike. Duljine stranica zadane su u istim mjernim jedinicama.



40. Neka je trokut ABC s oznakama kao na slici. Odredi nepoznate elemente trokuta (duljine stranica, mjere kutova) ako je zadano:

- a) $a = 11$ cm, $c = 19$ cm, $\beta = 47^\circ$
- b) $b = 10.25$ cm, $c = 16.5$ cm, $\alpha = 71^\circ$
- c) $a = 7.55$ cm, $b = 9.6$ cm, $\gamma = 54^\circ 50'$
- d) $a = 7$, $b = 9.5$, $c = 11.8$
- e) $a = 4.3$, $b = 7.55$, $c = 6.3$
- f) $a = 17.25$, $b = 9.4$, $c = 13.5$.



41. Duljine dviju stranica trokuta iznose 5.8 cm i 11.2 cm, a mjera kuta između njih jest 75°.

- a) Odredi duljinu treće stranice trokuta.
- b) Izračunaj površinu trokuta.

42. Duljina velike kazaljke na zidnom satu iznosi 12 cm, a duljina male kazaljke 8 cm.

- a) Kolika je mjera kuta koji zatvaraju kazaljke u 14 sati?
- b) Odredi udaljenost vrhova kazaljki u 14 sati.

43. Duljine stranica trokuta iznose 7 cm, 9 cm i 11 cm. Odredi mjeru najvećeg kuta u trokutu.

44. Duljine stranica trokuta u omjeru su 1 : 2 : 3. Odredi mjeru najmanjeg kuta u trokutu.

45. Dva užeta, koja zatvaraju kut od 40°, drže šator i pričvršćena su na tlo. Jedno je uže duljine 2.5 m, a drugo 3 m. Kolika je udaljenost između mjesta gdje su užad pričvršćena u tlo?



46. Dvije ceste polaze iz istog raskrižja pod kutom od 75°. Na jednoj se nalazi selo udaljeno 12 km, a na drugoj drugo selo udaljeno 9 km. Kolika je zračna udaljenost između sela?

47. Dva planinara krenula su s istog mjesta. Jedan ide 4 km prema sjeveru, a drugi 6 km pod kutom od 100° u odnosu na prvog. Kolika je međusobna zračna udaljenost nakon prijedjenih ruta?

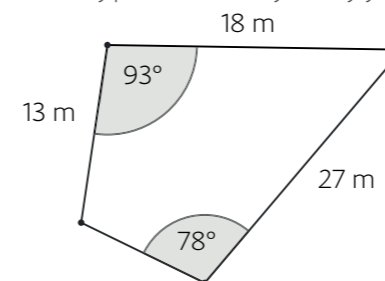


48. Duljine dijagonala paralelograma iznose 24 cm i 18 cm, a mjera kuta između dijagonala 74°. Odredi duljine stranica paralelograma.

49. Duljine osnovica trapeza iznose 15.2 cm i 11.4 cm, a duljine krakova 8.6 cm i 5.4 cm.

- a) Odredi mjere kutova u trapezu.
- b) Odredi duljine dijagonala.
- c) Izračunaj površinu trapeza.

50. Izračunaj površinu zemljišta čiji je tlocrt prikazan na slici.



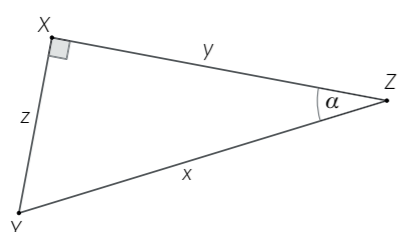
ŽELIM NA MATURU!

Zadaci višestrukog izbora

1. Koji je od navedenih brojeva najmanji?

- A. $\sin 25^\circ 43'$ B. $\cos 34^\circ 25'$ C. $\operatorname{tg} 32^\circ 15'$ D. $\operatorname{ctg} 15^\circ 32'$

2. Koji trigonometrijski omjer vrijedi u trokutu na slici?



- A. $\sin \alpha = \frac{z}{y}$ B. $\cos \alpha = \frac{y}{x}$
 C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{x}$ D. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$

3. U pravokutnom je trokutu jedna kateta duljine 4 cm, a kut nasuprot njoj ima mjeru 60° . Koja je tvrdnja točna?

- A. Duljina hipotenuze je $3\sqrt{2}$. B. Duljina druge katete je $3\sqrt{3}$.
 C. Opseg trokuta iznosi $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. Površina trokuta iznosi $3\sqrt{3}$.

4. U pravokutnom je trokutu mjera jednogakuta 65° . Koliki je omjer duljina hipotenuze i dulje katete tog trokuta?

- A. 0.42 B. 0.91 C. 1.10 D. 2.36

5. Polumjer trokutu opisane kružnice jest 12 cm, a duljina najkraće stranice trokuta iznosi 14.25 cm. Koliko iznosi mjera najmanjeg kuta tog trokuta?

- A. $36^\circ 25'$ B. 45° C. $55^\circ 15'$ D. $57^\circ 22'$

6. Duljina osnovice jednakokravnog trokuta iznosi 12 cm, a mjera kuta između osnovice i kraka 36° . Koliko iznosi duljina visine na osnovicu?

- A. 3.53 B. 4.36 C. 4.85 D. 8.72

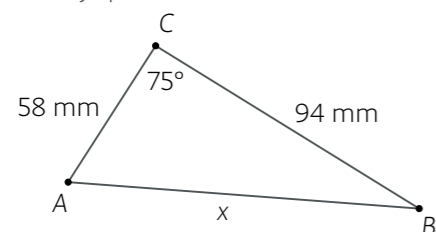
7. Duljine dviju stranica trokuta iznose 11 cm i 16 cm, a mjera kuta nasuprot duljoj stranici 64° . Koliko iznosi mjera kuta nasuprot kraćoj stranici?

- A. 26° B. $35^\circ 15'$ C. $38^\circ 10'$ D. 52°

8. Duljine stranica trokuta u omjeru su 4 : 5 : 8. Kolika je mjera najvećeg kuta?

- A. $75^\circ 6'$ B. 90° C. 105° D. $125^\circ 6'$

9. Na skici je prikazan trokut ABC. Koliko iznosi duljina stranice \overline{AB} tog trokuta?



- A. 97 mm B. 87 mm
 C. 77 mm D. 67 mm

10. Duljine stranica paralelograma iznose 14.4 cm i 22.6 cm, a mjera jednog njegovog kuta iznosi $64^\circ 45'$. Kolika je duljina dulje dijagonale tog paralelograma?

- A. 11.38 cm B. 18.50 cm C. 20.99 cm D. 31.56 cm

Zadaci kratkog odgovora

11. Odredi duljinu polumjera jednakostraničnom trokutu opisane kružnice ako je duljina stranice tog trokuta $6\sqrt{3}$.

12. Kolika je mjera većeg kuta u pravokutnom trokutu čije su duljine kateta 11 cm i 9 cm?

13. U pravokutnom je trokutu mjera jednog kuta 32° . Koliki je omjer duljina hipotenuze i dulje katete tog trokuta? Zaokruži rezultat na dva decimalna mjesta.

14. Površina tupokutnog trokuta iznosi 32.24 cm^2 . Duljine su dviju kraćih stranica tog trokuta 7.5 cm i 11 cm. Kolika je mjera tupog kuta?

15. Duljina osnovice jednakokravnog trokuta iznosi 18 cm, a mjera kuta nasuprot osnovici 86° . Izračunaj duljinu visine na osnovicu.

16. Osoba visoka 183 cm baca sjenu dugu trećini svoje visine. Koliki kut u tom trenutku zatvaraju Sunčeve zrake s horizontalnom ravninom?

17. U trokutu ABC duljine stranica iznose $a = 18 \text{ cm}$, $b = 27 \text{ cm}$, a duljina težišnice na stranicu a jest $t_a = 24 \text{ cm}$. Kolika je duljina stranice c tog trokuta?

18. Duljine stranica pravokutnika u omjeru su 16 : 9. Odredi mjeru kuta između dijagonala tog pravokutnika.

19. Duljine dijagonala paralelograma iznose 14 cm i 18 cm, a mjera kuta između njih 54° . Kolika je duljina kraće stranice tog paralelograma?

20. Duljine dijagonala romba iznose 12.4 cm i 9.1 cm. Odredi šiljasti kut romba.

FIZIKA ZA ČETVEROGODIŠNJE STRUKOVNE ŠKOLE

Fizika u struci

Autorski tim: Jakov Labor, Jasmina Zelenko Paduan, Igor Vidović

Udžbenici su organizirani u skladu s kurikulumom Fizike u struci:

OSNOVE MEHANIKE KRUTOG TIJELA

Mehanika krutog tijela

OSNOVE TITRANJA I VALOVI

1. Mehaničko titranje

2. Mehanički valovi

3. Elektromagnetsko titranje i valovi

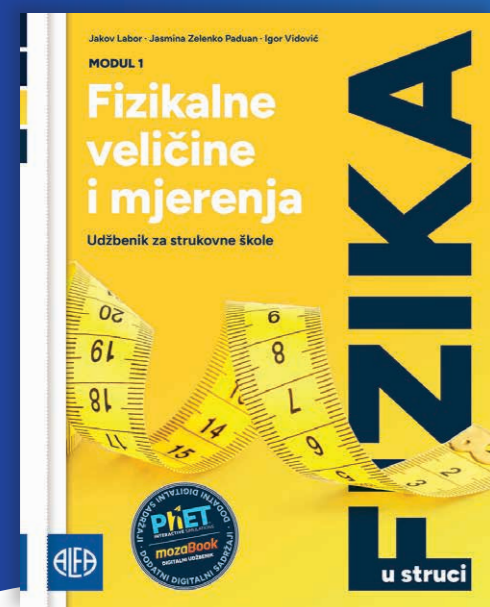


FIZIKALNE VELIČINE I MJERENJA

1. Fizikalne veličine i mjerenja u mehanici

2. Električna mjerljiva svojstva i temperatura

3. Mjerljiva svojstva zvuka i svjetlosti



Udžbenici *Fizika u struci* nude strukturiran i motivirajući pristup s jasno razrađenim teorijskim dijelom potkrijepljen konkretnim modelima i pokusima te s riješenim bogatim primjerima olakšavajući učenicima usvajanje gradiva i samostalno rješavanje zadataka. Za naprednije učenike udžbenik nudi složenije zadatke i pripremne vježbe za državnu maturu osiguravajući cjelovitu pripremu za daljnje obrazovanje.

Sadržaj je prilagođen specifičnim potrebama učenika strukovnih škola, s logičkim slijedom nastavnih jedinica i zadacima koji povezuju teoriju s praktičnom primjenom u stvarnom svijetu. Takav pristup omogućuje učenicima razvoj praktičnih vještina i znanja relevantnih za njihove buduće karijere, bez obzira na odabrani strukovni smjer, čime se osigurava njihova spremnost za profesionalni uspjeh.



OSNOVE MEHANIKE MATERIJALNE TOČKE

1. Uvod u kinematiku

2. Uvod u dinamiku

3. Rad, energija i snaga

4. Gravitacija



OSNOVE TERMODINAMIKE

1. Toplinske pojave i idealni plin

2. Termodinamički sustavi i procesi

OSNOVE MEHANIKE FLUIDA

1. Statika fluida

2. Dinamika fluida



Temeljna načela udžbenika – aktivno, iskustveno i problemsko učenje fizike s izravnom primjenom u tehničkim i drugim strukama

Ovaj udžbenik ciljano je pisan za učenike strukovnih škola, s naglaskom na primjenu fizike u različitim područjima života. Nastavne cjeline metodički vode učenika i pomažu mu ostvariti ishode predviđene kurikulumom, a svaka nastavna jedinica uvodi novi fizikalni koncept motivacijskim primjerom popraćenim pokusom i teorijskim tumačenjem. Iza svakog koncepta riješeni su primjeri koji učeniku daju sva potrebna znanja za samostalno rješavanje zadataka. Potom slijede konceptualna pitanja i numerički zadatci.

METODIČKA STRUKTURA SVAKOG POGLAVLJA

Uvod u cjelinu pisan je tako da se obraća učeniku, objedinjuje teme cjeline te ih povezuje primjenom u struci i stvarnim životom i predočuje zašto je cjelina koja slijedi važna.

Svaka **tema** u cjelini sažeto je metodički prikazana na učenicima pristupačan način. **Ističu se preciznost i jasnoća izražavanja, što potiče razvoj formalnog kritičko-logičkog i sustavnog razmišljanja učenika.** Pristup temi omogućuje međupredmetnu povezanost. Tekst u udžbeniku potiče **istraživačko učenje** koje tako omogućuje učenicima razvijanje temeljnih kompetencija, **povećava znatiželju i zanimanje učenika** za znanost te omogućuje ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda.

Opisani pokusi upozoravaju učenika na pojave koje je potrebno razmatrati ne bi li se došlo do fizikalnih zakonitosti te motiviraju učenike, daju odgovore, ali i postavljaju nova pitanja. U digitalnom udžbeniku nalaze se snimke velike većine opisanih pokusa.

Riješeni primjeri numeričkih zadataka. Riješeni su primjeri numeričkih zadataka i riješeni su detaljno. Mjerne jedinice naglašene su u svakom koraku rješenja kako bi učeniku omogućile samostalno praćenje i razumijevanje tijek rješavanja zadatka.

Prijedlozi **samostalnih učeničkih mjerenja, učeničkih virtualnih pokusa i projekata.**

Učeničko mjerenje jest mjerenje koje učenik provodi samostalno uz minimalnu količinu pribora te na temelju njega donosi zaključke i sudjeluje u raspravi.

Učenički virtualni pokus jest pokus koji je pripremljen u virtualnom okružju gdje učenik može samostalno istraživati fizičke pojave, vršiti mjerenja, otkrivati zakonitosti i donositi zaključke.

Konceptualna pitanja za samoprocjenu i **Numerički zadatci.** Uz konceptualna pitanja za samoprocjenu učenik procjenjuje usvojenost novih koncepata, a obuhvaćaju sve razine usvojenosti i omogućuju sistematizaciju znanja.

Zadatci za vježbu nalaze se na kraju cjeline, a trebaju pomoći učeniku pri usvajanju ishoda, uvježbavanju.

Želim na maturu donose tipove zadataka kakvi se pojavljuju na državnoj maturi i osim uvježbavanja omogućuju učenicima razvijanje svijesti o tipovima zadataka kakvi se mogu pojaviti na maturi.

Mentalna mapa nalazi se iza zadataka za vježbu. Tu je još jednom prikazan sažet pregled formula po temama. Vizualizacija sadržaja omogućuje povezivanje ishoda unutar cjeline te povezivanje ishoda različitih cjelina uspoređivanjem više mentalnih mapa – što može potaknuti učenike da i sami stvore vlastitu mentalnu mapu, prilagođenu njihovom mentalnom sklopu. Osobito su praktične pri odgovaranju na pitanja za samoprocjenu. Naime, učenici u odgovaranju na konceptualna pitanja često imaju potrebu nagađati, pritom je dobro imati na umu određeni koncept ili zakon – a oni su sustavno prikazani u mentalnoj mapi. Potom učenik može riješiti priloženi **test za samoprocjenu.**

Prijedlozi **projekata** koji su složeniji od učeničkih pokusa zahtijevaju više materijalnih uvjeta, obuhvaćaju mjerenje i obradu izmjerenih podataka, njihovu prezentaciju u razredu i u pravilu se izvode timski. Projektima se razvijaju sve istraživačke vještine učenika i komunikacija na razini učenik – učenik.

Učenički pokusi i projekti povezuju teme s učenikovim iskustvima, suočavaju ga s neprerađenom, neidealiziranom stvarnošću, razvijaju njegove generičke kompetencije i prirodoslovno-znanstveni način razmišljanja, čime on **postaje aktivni sudionik procesa učenja i razvija kompetencije za cjeloživotno učenje.** I pokusi i projekti u širokom su spektru od vrlo jednostavnih do zahtjevnih, primjereni različitim sposobnostima učenika – do nadarenih, čime se potiče proširivanje i produblivanje znanja. **Učenički pokusi i projekti su jezgra istraživački usmjerene nastave fizike.**



Na kraju udžbenika nalaze se **rješenja svih konceptualnih i numeričkih zadataka, kao i zadataka za ponavljanje i zadataka Želim na maturu.**

PhET simulacije

Udžbenici iz fizike obogaćeni su QR kodovima koji vode do interaktivnih PhET simulacija Sveučilišta u Coloradu – vodećeg svjetskog izvora obrazovnih simulacija iz prirodnih znanosti i matematike. Alfa je s PhET inicijativom sklopila partnerstvo te su simulacije prevedene na hrvatski jezik. Dostupne su na računalu i mobilnim uređajima, bez instalacije, i omogućuju učenicima vizualno istraživanje fizikalnih pojava na zanimljiv i intuitivan način.

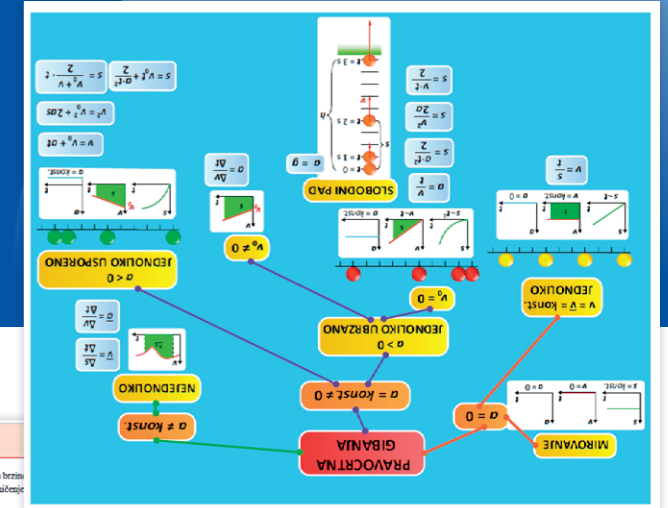


Digitalni udžbenik na mozaBooku

Uz svaki tiskani udžbenik korisnik dobiva i licencu za digitalni udžbenik. Digitalni udžbenik vrijedi godinu dana, vezan je za vaš mozaWeb korisnički račun, a po isteku licence može se reaktivirati.

Digitalni udžbenik dostupan je na svim uređajima i platformama: putem mozaWeb stranice u bilo kojem internetskom pregledniku, u mozaBook softveru za Windows (komercijalna licenca) te u besplatnoj mozaBook aplikaciji za mobilne uređaje (iOS i Android). Svi korisnici mogu besplatno instalirati mozaBook na mobitel ili tablet i preuzeti udžbenik za korištenje bez internetske veze.

Licencu će aktivirati vaš promotor.



Metodička podrška za udžbenike Fizika u struci

Metodička podrška dostupna je na platformi Alfa Kabinet i redovito se dopunjava novim sadržajima. Svi korisnici udžbenika imaju neograničen pristup materijalima.

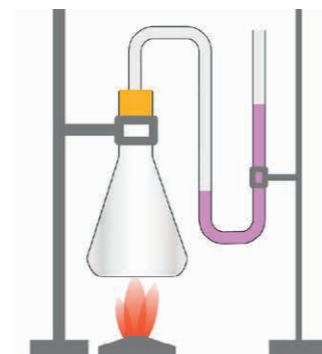
- GIK (godišnji izvedbeni kurikulum)
- metodičke pripreme za svaki nastavni sat
- prezentacije za svaki nastavni sat
- snimljeni pokusi uz pismene upute za promatranje
- PhET simulacije
- upute za izvođenje virtualnih pokusa
- digitalni obrazovni sadržaji u mozaBooku



Metodičku podršku možete pregledati na Kabinetu!

Jednadžba stanja idealnog plina

Pri izobarnoj promjeni stanja plina stalan je kvocijent volumena i temperature plina, pri izohornoj kvocijent tlaka i temperature, a pri izotermnoj promjeni umnožak tlaka i volumena. Što je stalno kada se mijenjaju sve veličine stanja plina (tlak, volumen i temperatura, slika 1.34.)?



Slika 1.34.

Iz plinskih zakona možemo izvesti jednadžbu koja povezuje dva stanja plina različita po tlaku, volumenu i temperaturi. Nazivamo je **jednadžbom stanja plina**.

Za izobarnu, izohornu i izotermnu promjenu vrijede međuovisnosti:

$$\frac{V}{T} = konst. \quad \frac{p}{T} = konst. \quad pV = konst.$$

Ako objedinimo sva tri plinska zakona, dobit ćemo prvi oblik **jednadžbe stanja plina**:

$$\frac{pV}{T} = konst.$$

Stavimo li uz veličine početnog stanja indeks 1, a uz veličine konačnog stanja indeks 2, jednadžba poprima oblik:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Možemo li nešto pobliže otkriti o konstanti (*konst.*)?

ISTRAŽIVAČKI ZADATAK – Kako konstanta $\frac{pV}{T}$ ovisi o broju i vrsti molekula?

Cilj: Utvrditi ovisi li izraz $\frac{pV}{T}$ o broju (N) i vrsti molekula te odrediti matematičku ovisnost.

Oprema: Računalo, tablet ili pametni telefon s pristupom internetu, simulacija na adresi https://phet.colorado.edu/sims/html/gas-properties/latest/gas-properties_hr.html ili upotrijebite priloženi QR kod.



Postupak

- Na izornoj traci kliknite na opciju *Idealni*. U posudu ubacite 200 većih molekula i očitajte tlak. Pod *Drži stalnim* kliknite na *Temperatura*. Ubacite još 200 većih molekula i ponovo očitajte tlak. Ovisi li izraz $\frac{pV}{T}$ o broju molekula? Kako?
- Zatim odstranite sve veće molekule i ubacite prvo 200, a zatim još 200 manjih molekula. Temperaturu držite konstantnom i očitavajte tlak. Na kraju ubacite 200 velikih i 200 malih molekula. Što opažate? Ovisi li izraz $\frac{pV}{T}$ o vrsti molekula?

Opažanja

- Konstanta $\frac{pV}{T}$ proporcionalna je broju molekula.
- Konstanta $\frac{pV}{T}$ **ne ovisi o vrsti plina**.

Zaključak

Konstanta $\frac{pV}{T}$ proporcionalna je samo broju molekula, pa se može zapisati kao:

$$\frac{pV}{T} = k_B N,$$

gdje je:

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Boltzmannova konstanta.

Jednadžbu stanja plina sada možemo zapisati ovako:

$$pV = k_B N T.$$

Broj molekula (N) u plinu nezamislivo je velik. Primjerice, u samo jednom kubičnom metru zraka na sobnoj temperaturi i pri atmosferskom tlaku broj molekula približno je sto milijuna puta veći nego što je prošlo sekundi od nastanka svemira do danas.

Zato je uvedena fizikalna veličina **količina tvari**, jedna od 7 osnovnih fizikalnih veličina SI sustava. Njezina je mjerna jedinica **1 mol**. Jedan mol plina sadrži $6,022 \cdot 10^{23}$ molekula. To je brojčana vrijednost **Avogadrove konstante** (N_A):

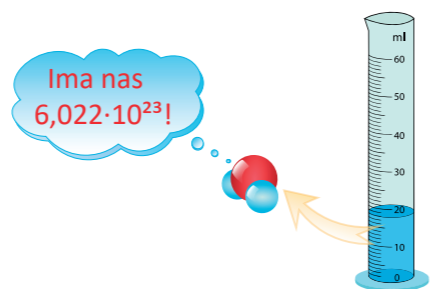
$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Ako je u tvari N molekula, množina je tvari (n):

$$n = \frac{N}{N_A}.$$

Tako u jednom kubičnom metru zraka ima približno 40 mola.

No kako izmjeriti mole? Jednostavno, mjerenjem mase plina. Masa plina po molu naziva se **molar-na masa** (M). Mjeri se u **gramima po molu** i iznosi koliko i pripadna relativna molekulska masa, pa se može očitati iz **periodnog sustava elemenata**. Tako primjerice relativna molekulska masa helija (He) iznosi 4 g/mol, vodika (H_2) iznosi 2 g/mol, kisika (O_2) 32 g/mol, a vode (H_2O) 18 g/mol. Drugim riječima, količina tvari u 18 g vode iznosi 1 mol i sastoji se od $6,022 \cdot 10^{23}$ molekula H_2O (slika 1.35.).

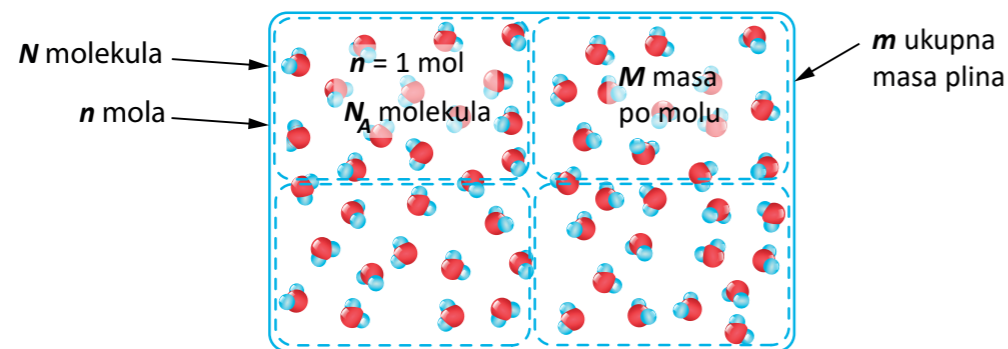


Slika 1.35. 18 g vode sadrži $6,022 \cdot 10^{23}$ molekula H_2O

Za n puta veću količinu tvari i masa plina (m) veća je n puta:

$$m = n \cdot M.$$

Odnosi između veličina koje se odnose na broj molekula i na masu prikazani su slikom 1.36.



Slika 1.36. Fizikalne veličine pomoću kojih brojimo molekule

Ako sada u jednadžbi stanja plina iskažemo broj molekula preko količine tvari,

$$N = n \cdot N_A,$$

dobit ćemo i treći oblik te jednadžbe:

$$p \cdot V = k_B \cdot n \cdot N_A T.$$

Produkt dviju konstanti (k_B i N_A) također je konstanta, nazvana **opća plinska konstanta R** :

$$R = k_B N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}.$$

S tom je zamjenom:

$$pV = nRT.$$

Korisno je uspostaviti vezu između tlaka i gustoće. Uvrštavanjem $n = \frac{m}{M}$ dobivamo:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Dijeljenjem s volumenom i zamjenom kvocijenta mase i volumena s ρ (gustoća) jednadžba stanja poprima oblik:

$$p = \frac{\rho}{M} RT.$$

Temperatura i srednja kinetička energija molekula idealnog plina. Utvrdili smo da povećanjem temperature termičko gibanje molekula postaje intenzivnije. Izvest ćemo izraz koji povezuje srednju kinetičku energiju molekula idealnog plina ($\overline{E_k}$) s njegovom temperaturom (T).

Iz jednadžbi:

$$pV = k_B NT$$

i:

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \overline{E_k}$$

slijedi:

$$\frac{2}{3} \frac{N}{V} \overline{E_k} V = k_B NT$$

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2} k_B T.$$

Srednja kinetička energija molekula idealnog plina proporcionalna je temperaturi. Možemo reći da je **apsolutna temperatura mjera za srednju kinetičku energiju molekula idealnog plina**. Ova jednadžba objašnjava smisao temperature, zbog čega se smatra velikim uspjehom kinetičke teorije plinova.

Izbjegni pogrešku!

Budući da je srednja kinetička energija proporcionalna apsolutnoj temperaturi, na apsolutnoj nuli molekule miruju.

Temperaturi je proporcionalna srednja kinetička energija molekula **idealnog plina**. Realni plin na niskim temperaturama **nije** idealni plin. Kako se temperatura smanjuje, tako je gibanje molekula sve slabije, ali ne prestaje ni na najnižoj mogućoj temperaturi, gdje je minimalno.

Primjer: Temperatura 1 m³ zraka iznosi 27 °C, a tlak 1 bar. Srednja molarna masa plinova u zraku iznosi 28,8 g/mol. Izračunajmo:

- broj mola zraka
- broj molekula zraka
- masu zraka
- gustoću zraka u zadanim uvjetima.

Rješenje:

$$V = 1 \text{ m}^3$$

$$t = 27 \text{ }^\circ\text{C}, T = 300 \text{ K}$$

$$p = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$M = 28,8 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

a. $n = ?$

$$pV = nRT$$

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 1 \text{ m}^3}{8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} \cdot 300 \text{ K}}$$

$$n = 40,1 \text{ mol}$$

c. $m = ?$

$$m = n \cdot M$$

$$m = 40,1 \text{ mol} \cdot 28,8 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$m = 1\,155 \text{ g}$$

b. $N = ?$

$$N = n \cdot N_A$$

$$n = 40,1 \text{ mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$N = 2,41 \cdot 10^{25}$$

d. $\rho = ?$

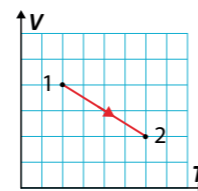
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1,155 \text{ kg}}{1 \text{ m}^3}$$

$$\rho = 1,155 \text{ kg/m}^3$$

Konceptualna pitanja

1. Tlak određene količine idealnog plina iznosi p , volumen V i temperatura T . Ako nakon promjene stanja plina tlak iznosi $4p$, a volumen $V/2$, kolika je temperatura?

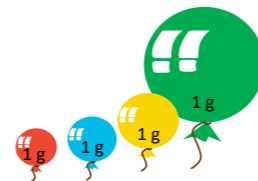
2. Idealni plin prelazi iz stanja 1 u stanje 2 procesom prikazanim na slici. U stanju 1 tlak plina je p_1 , a u stanju 2 je p_2 . Koliko iznosi omjer tlakova p_2 i p_1 ? Obrazložite.



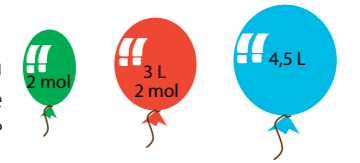
3. Ako se tlak i volumen idealnog plina povećaju dva puta, kako će se pritom promijeniti srednja kinetička energija molekula plina?

4. U jednoj od dviju jednakih posuda nalazi se vodik, a u drugoj kisik. Tlakovi i temperature u posudama su jednaki. U kakvom su odnosu brojevi molekula u posudama?

5. Svaki od četiriju balona ima jednaku masu plina pri jednakoj temperaturi i tlaku. Jedan ima kisik (O₂), drugi neon, treći argon, a četvrti vodik (H₂). Pridijelite plin svakom balonu. Molarne mase očitajte u PSE.



6. U balonima su različiti idealni plinovi jednakog tlaka i na jednakim temperaturama. Količina tvari i volumeni zadani su na slici. **a.** Koliki je volumen zelenog balona? **b.** Kolika je količina plina u plavom balonu? Obrazložite.



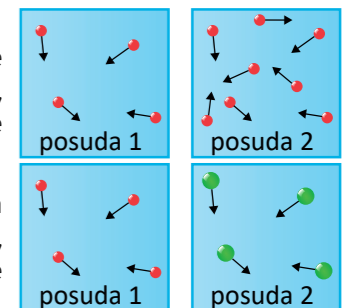
7. Koji plin pri zadanoj gustoći i temperaturi ima najveći tlak? Obrazložite.

8. Helij i kisik nalaze se svaki u svojoj zatvorenoj posudi na jednakim temperaturama. Usporedite srednje kinetičke energije molekula kisika i helija.

9. Temperatura idealnog plina poveća se od 300 K na 900 K. Kako se pritom promijeni srednja kinetička energija molekula?

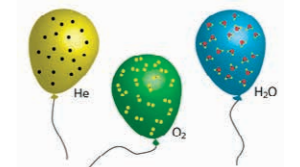
10. Ima li smisla pojam „temperatura molekule”? A pojam „tlak molekule”?

11. Idealni plin nalazi se u dvjema posudama, 1 i 2, jednakih volumena. Molekule plina u objema posudama imaju jednake mase i srednje kinetičke energije, ali je broj molekula u posudi 2 veći od broja molekula u posudi 1. Usporedite temperature plina u posudama.



12. Dvije posude jednakih volumena, 1 i 2, ispunjene su jednakim brojem molekula idealnog plina. Brzine molekula u objema su posudama jednake, ali je masa molekula u posudi 2 veća nego u posudi 1. Usporedite temperature plina u posudama. Prisjetite se da je izraz za kinetičku energiju.

13. Tri balona jednakih volumena sadrže jednak broj molekula idealnog plina jednakih temperatura. Imaju li ta tri plina i jednaku masu, tlak ili molarnu masu?



Numerički zadatci

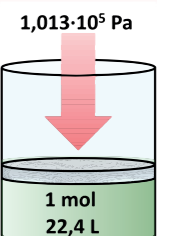
1. Svojstva plina zadana su slikom. Kolika je temperatura plina u °C?

2. Pri normalnom tlaku (101,3 kPa) i temperaturi od 5 °C volumen nekog plina iznosi 20 cm³. Koliki je volumen plina pri temperaturi od 30 °C i tlaku 107 kPa?

3. Zračni jastuk u automobilu napuše se dušikom na volumen od 60 litara pri temperaturi od 27 °C i tlaku od 1·10⁵ Pa. Koliko je grama dušika potrebno za to?



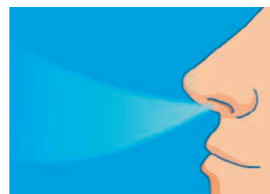
primjena u struci



4. U posudi volumena 100 L nalazi se plin pri temperaturi od 27 °C i tlaku od 108 kPa. Koliko je mola i molekula plina u posudi?

5. U suvremenim vakuumskim sustavima postiže se tlak od 10⁻¹¹ Pa. Izračunajte broj molekula u posudi od 1 m³ pri tom tlaku i temperaturi od 27 °C.

6. Koliko molekula zraka udahnemo u svakom udisaju pri normalnom tlaku i temperaturi od 20 °C ako volumen pluća poraste s 1,6 L na 2 L?



7. U posudi volumena 1 000 litara nalazi se 500 g vodene pare pri temperaturi od 500 °C. Koliki je tlak vodene pare uz pretpostavku da se ona ponaša kao idealni plin? Molarne mase vodika i kisika očitajte u PSE.

8. Plin volumena 0,2 L i mase 0,4 g nalazi se na 40 °C pod tlakom $1,5 \cdot 10^5$ Pa. Kolika je molarna masa tog plina?

9. Ronilački spremnik dizajniran je da drži 1 870 litara zraka pri normalnom atmosferskom tlaku i temperaturi od 22 °C. Kada se ovaj volumen zraka komprimira na tlak od 20,7 MPa i pohrani u spremnik od 10 litara, zrak postane tako vruć da se spremnik prije korištenja mora ohladiti. Kolika je temperatura zraka u spremniku prije hlađenja?

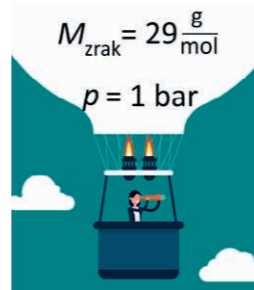


primjena u struci

10. Vertikalna valjkasta posuda visoka 30 cm zatvorena je pomičnim klipom površine 20 cm² i mase 2 kg. U posudi se nalazi plin pri temperaturi od 10 °C. Kolika je količina plina u posudi ako je atmosferski tlak 10⁵ Pa?

11. Kolika je gustoća vodika (H₂) pri temperaturi od 0 °C i 97 kPa?

12. Da bi se neki balon mogao uzdići s košarom i putnicom (slika), gustoća zraka u balonu smije biti najviše 0,95 g/L. Na koju temperaturu u °C moramo zagrijati zrak u balonu?



$$M_{\text{zrak}} = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$p = 1 \text{ bar}$$

13. (zahtjevnije) Tlak zraka u sobi dimenzija 6 m · 5 m · 3 m iznosi 1 bar, a temperatura 27 °C. Kolika će masa zraka izaći iz sobe kada mu se temperatura poveća za 5 °C, a tlak ostane nepromijenjen? Molarna je masa plinova u zraku 29 g/mol.

14. (zahtjevnije) Puni spremnik u zrakoplovu sadrži 12 kg kisika pod tlakom od 120 bara. Pri radu sa spremnikom tlak kisika smanji se na 75 bara. a. Kolika je masa kisika u boci pri tom tlaku uz pretpostavku da se temperatura nije mijenjala? b. Koliko je kisika potrošeno pri radu?

primjena u struci

15. (zahtjevnije) Automobilska guma napunjena je zrakom temperature 15 °C na tlak 2 bara. Nakon vožnje zrak u gumi zagrijao se na 40 °C. Koliki se postotak zraka mora ispuhati iz gume da bi se tlak vratio na početnu vrijednost od 2 bara? Pretpostavite da se volumen gume nije mijenjao.

UČENIČKI VIRTUALNI POKUS - mikroskopsko objašnjenje temperature

Otvorite interaktivnu računalnu simulaciju na poveznici:

https://phet.colorado.edu/sims/html/gas-properties/latest/gas-properties_hr.html

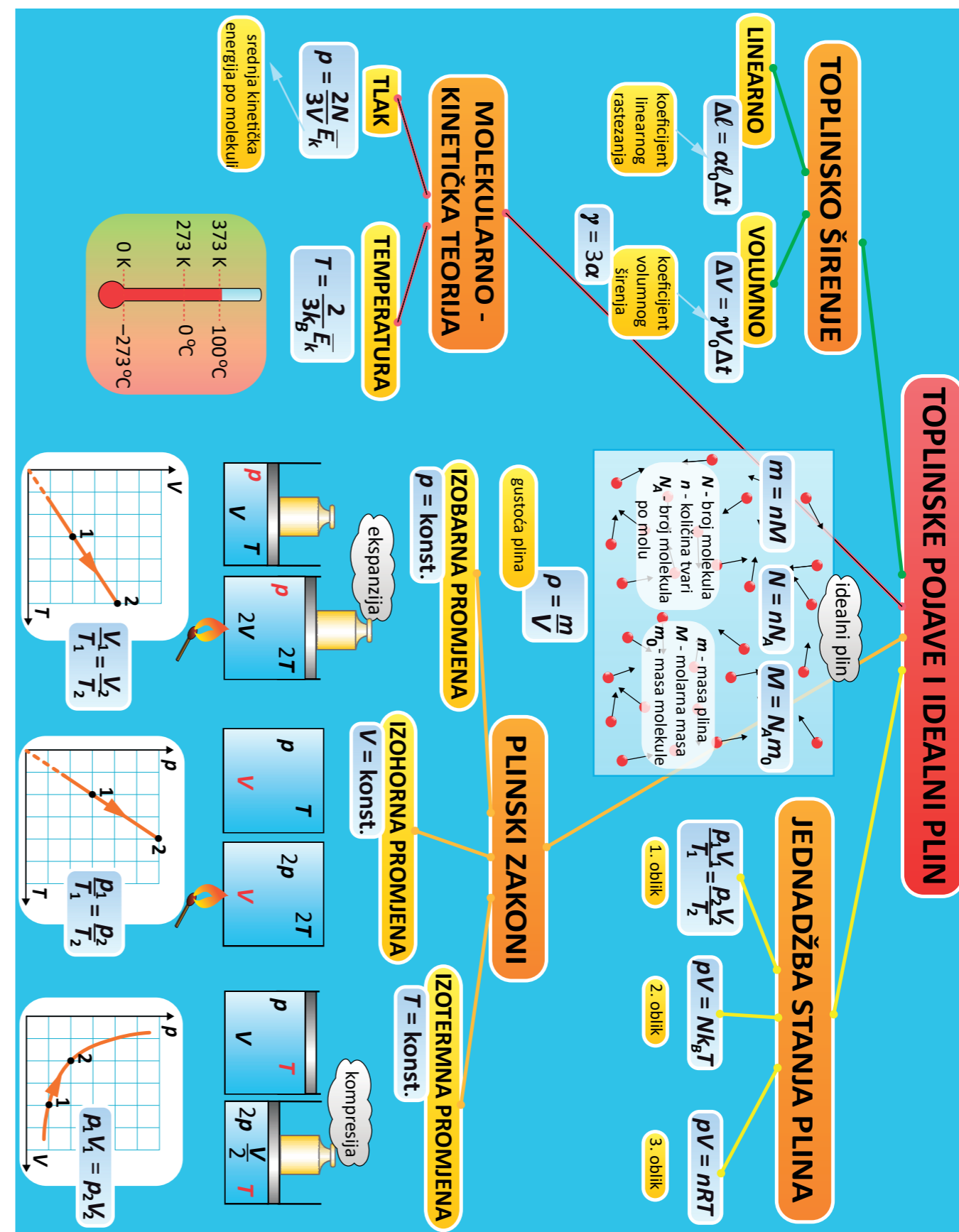
ili upotrijebite priloženi QR kod.



Na izornoj traci kliknite na opciju *Energija* pa na opciju *Čestice*. Ubacite 200 molekula veće mase (plave molekule) i još 200 molekula manje mase (crvene molekule). Kliknite lijevo na *Kinetička energija* pa označite plave i crvene molekule i u prikazu zastupljenosti *brzina* i u prikazu zastupljenosti *Kinetička energija*. **Usporedite brzine plavih i crvenih molekula. Usporedite njihove kinetičke energije.** Istražite vrijede li opaženi odnosi i na drugim temperaturama.


MEĐUPREDMETNA TEMA
informatička i
komunikacijska
tehnologija

TOPLINSKE POJAVE I IDEALNI PLIN



Zadatci za vježbu 1

TOPLINSKE POJAVE I IDEALNI PLIN

1. Dvije željezne šipke duljina 10 m postavljene su jedna do druge kako je prikazano na slici. Temperatura šipki iznosi $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Koliki je razmak između šipki ako se pri temperaturi $33\text{ }^{\circ}\text{C}$ šipke spoje? Koeficijent linearnog toplinskog rastezanja željeza jest $1,2 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.
- 
2. Olovna šipka ima duljinu 5 m pri temperaturi $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Na kojoj se temperaturi njezina duljina poveća za 3 mm? Koeficijent linearnog toplinskog rastezanja olova jest $2,9 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.
3. Aluminijska posuda napunjena je do vrha benzinom volumena 50 L. Ako su posuda i benzin na temperaturi $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, koliko će litara benzina iscuriti iz posude na temperaturi $30\text{ }^{\circ}\text{C}$? Koeficijent volumnog toplinskog rastezanja benzina jest $9,5 \cdot 10^{-4}\text{ K}^{-1}$, a koeficijent volumnog toplinskog rastezanja aluminijske posude jest $7,2 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.
4. Kvadar A dimenzija $l \cdot 2l \cdot 3l$ i kocka B dimenzija $2l \cdot 2l \cdot 2l$ napravljene su od istog materijala. U kakvom su odnosu promjene volumena kvadra i kocke ako se temperatura za oba tijela promijeni za ΔT ?
- a) $\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = 1$ c) $\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{4}{3}$
5. Neki idealni plin temperature T ima volumen V . Koliki će biti volumen plina pri izobarnoj promjeni ako se temperatura poveća za 50 %?
- a) $2V$ b) $1,5V$ c) V d) $0,5V$
6. Balon napunjen idealnim plinom temperature $22\text{ }^{\circ}\text{C}$ ima volumen 0,5 L. Stavimo balon u hladnjak na temperaturu $4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Koliki će biti volumen balona kada se skroz ohladi u hladnjaku?
7. Pri temperaturi $38\text{ }^{\circ}\text{C}$ idealni plin ima volumen 9 L. Na koju smo temperaturu izobarno ohladili plin ako se njegov volumen smanjio za 30 %?
8. Neki idealni plin temperature T i tlaka p nalazi se u zatvorenoj posudi. Kolika je promjena temperature plina ako se zagrijavanjem tlak povećao na $3p$ zanemarimo li termičko širenje same posude?
- a) $4T$ b) $3T$ c) $2T$ d) T
9. Idealni plin temperature $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaka 48 kPa nalazi se u zatvorenoj posudi. Koliki će biti tlak plina ako posudu zagrijemo na temperaturu $50\text{ }^{\circ}\text{C}$? Zanemarite termičko širenje same posude.
10. Idealni plin temperature $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaka 3 bara izohorno ohladimo. Kolika je konačna temperatura plina ako mu je tlak pao za 2 bara?
11. Idealni plin volumena V i tlaka p izotermno se smanjuje (komprimira) do polovice početnog volumena. Koliki je konačni tlak plina?
- a) $2p$ b) $1,5p$ c) p d) $0,5p$
12. Balon volumena 12 L napunjen je zrakom pod tlakom 20 kPa. Koliki će biti konačan volumen balona ako mu izotermno (ili pri stalnoj temperaturi) povećamo tlak na 30 kPa?

13. Pomiješali smo 490 cm^3 kisika i 870 cm^3 dušika (oba su plina pod tlakom 113 kPa) i dobili smo smjesu od 1360 kubnih centimetara smjese plina pri jednakom tlaku. Koliki će biti konačni tlak kada ovu mješavinu plinova stavimo u epruvetu volumena 540 cm^3 ? Temperatura plina ostaje ista.
14. Kolika je srednja kinetička energija molekule plina pri temperaturi $20\text{ }^{\circ}\text{C}$?
15. Plin pri temperaturi $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaku 20 kPa zauzima volumen 80 mL. Koliki bi volumen zauzimao isti plin pri temperaturi $22\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaku 10 kPa?
16. U posudi se nalazi 3,5 mola idealnog plina pri temperaturi $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaku 0,12 MPa. Koliki je volumen posude?
17. Balon volumena 85 L sadrži 3,5 mola plina pri tlaku od 10^5 Pa . Kolika je temperatura tog plina u $^{\circ}\text{C}$?
18. U posudi volumena 98 L nalazi se plin na $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ pod tlakom $2,5 \cdot 10^5\text{ Pa}$. Kolika je količina tvari tog plina u posudi?
19. Plin mase 8,3 kg nalazi se u spremniku volumena 35 L pri temperaturi $42\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaku 19241,75 kPa. Kolika je molarna masa tog plina?
20. Plin temperature $-55\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaka $5 \cdot 10^5\text{ Pa}$ zauzima volumen 20 L. Koliki je broj molekula tog plina?
21. Koliki volumen zauzima 5 g molekula dušika N_2 temperature $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ pri normiranom tlaku?
22. Kolika je temperatura 20 g molekula kisika O_2 u posudi volumena 5 L pri tlaku $2,4 \cdot 10^5\text{ Pa}$?
23. Koliki će biti tlak mješavine 3 mola kisika i 4 mola dušika u posudi volumena 20 L pri temperaturi $27\text{ }^{\circ}\text{C}$?
24. Kolika je molarna masa plina gustoće 2,18 g/L, temperature $66\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaka 96 kPa?
25. Soba dimenzija $4\text{ m} \cdot 5\text{ m} \cdot 2,5\text{ m}$ napunjena je zrakom koji se sastoji od 79 % dušika N_2 i 21 % kisika O_2 . Temperatura sobe iznosi $22\text{ }^{\circ}\text{C}$, a tlak zraka je 101 kPa. Kolika je masa zraka u sobi?

ŽELIM NA Maturu

1. Metalnu kuglu hladimo. Koja je od navedenih tvrdnji točna?
 - a) Hlađenjem kugle povećava se njezin volumen.
 - b) Hlađenjem kugle povećava se njezina masa.
 - c) Hlađenjem kugle smanjuje se njezina masa.
 - d) Hlađenjem kugle povećava se njezina gustoća.
2. Metalnu kocku zagrijavamo pri čemu joj se volumen poveća. Koja je tvrdnja istinita?
 - a) Povećanje volumena ne ovisi o vrsti metala, ali ovisi o promjeni temperature i početnom volumenu kocke.
 - b) Povećanje volumena ne ovisi o vrsti metala i promjeni temperature, ali ovisi o početnom volumenu kocke.
 - c) Povećanje volumena ne ovisi o vrsti metala i početnom volumenu kocke, ali ovisi o promjeni temperature.
 - d) Povećanje volumena ovisi o vrsti metala, promjeni temperature i početnom volumenu kocke.
3. Duljina željeznog mosta ljeti iznosi $l = 1\,250$ m. Što vrijedi za duljinu mosta l' zimi?
 - a) $l' = 1\,250$ m
 - b) $l' > 1\,250$ m
 - c) $l' < 1\,250$ m
 - d) Nema dovoljno podataka.
4. Aluminijska šipka ima duljinu 300 cm na $20\text{ }^\circ\text{C}$. Za koliko se produlji ta šipka ako je zagrijemo na $40\text{ }^\circ\text{C}$? Koeficijent linearnog toplinskog rastezanja aluminija jest $2,6 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.
5. Na koju se temperaturu ohladila olovna šipka početne temperature $180\text{ }^\circ\text{C}$ ako joj se duljina smanjila za 0,5 % iznosa njezine početne duljine? Koeficijent linearnog toplinskog rastezanja olova jest $2,9 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.
6. Bakrena kugla ima polumjer 20 cm pri $10\text{ }^\circ\text{C}$. Koliki će biti polumjer te kugle kada je zagrijemo na $50\text{ }^\circ\text{C}$? Koeficijent linearnog toplinskog rastezanja bakra jest $1,7 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.
7. U dvjema jednakim posudama A i B nalazi se jednaka količina istog jednoatomnog plina. Ako je plin u posudi A dvostruko veće temperature od plina u posudi B , u kakvom su odnosu srednje kinetičke energije molekula tih plinova?
 - a) $\overline{E_{kA}} = \overline{E_{kB}}$
 - b) $\overline{E_{kA}} = 2\overline{E_{kB}}$
 - c) $2\overline{E_{kA}} = \overline{E_{kB}}$
 - d) $\overline{E_{kA}} = 4\overline{E_{kB}}$
8. U posudi A nalazi se dvostruko više čestica jednoatomnog plina nego u posudi B . Ako su plinovi u posudama A i B jednakih temperatura, u kakvom su odnosu srednje kinetičke energije čestica tih plinova?
 - a) $\overline{E_{kA}} = \overline{E_{kB}}$
 - b) $\overline{E_{kA}} = 2\overline{E_{kB}}$
 - c) $2\overline{E_{kA}} = \overline{E_{kB}}$
 - d) $\overline{E_{kA}} = 4\overline{E_{kB}}$
9. Srednja kvadratna brzina molekula idealnog plina iznosi v kada plin ima temperaturu T . Kolika će biti srednja kvadratna brzina molekula istog idealnog plina temperature $4T$?
 - a) $2v$
 - b) $4v$
 - c) $8v$
 - d) $16v$

10. U kojem će od navedenih procesa srednja kinetička energija čestica idealnog plina ostati nepromijenjena?
 - a) izohorno povećanje temperature
 - b) izobarno povećanje temperature
 - c) izotermno povećanje volumena
 - d) izobarno smanjenje volumena
11. U posudi A volumena V nalazi se idealni plin mase m , temperature T , tlaka p . U posudi B volumena V nalazi se isti idealni plin mase $m/2$, temperature $2T$. Koliki je tlak plina u posudi B ?
 - a) p
 - b) $4p$
 - c) $p/2$
 - d) $p/4$
12. Idealnom plinu volumen se izobarno poveća s 1 L na 3 L. Kolika je bila početna temperatura plina ako mu je konačna temperatura $37\text{ }^\circ\text{C}$?
13. Idealni plin temperature T pri tlaku p nalazi se u zatvorenoj posudi volumena V . Koliki će biti tlak plina ako mu temperatura poraste za 20 %?
14. Izobarnim zagrijavanjem s $27\text{ }^\circ\text{C}$ do $77\text{ }^\circ\text{C}$ idealnom se plinu volumen povećao za 0,2 L. Koliki je konačni volumen plina?
15. U zatvorenoj posudi tlak zraka pri temperaturi $27\text{ }^\circ\text{C}$ iznosi 100 kPa. Tijekom zagrijavanja poveća se tlak za 25 %. Na koju se temperaturu zagrijao taj zrak?
16. Idealni plin početnog volumena V i tlaka p izotermno hladimo. Za koliko će se postotno smanjiti volumen plina ako mu se tlak poveća za 50 % od početne vrijednosti?
17. U posudi s pomičnim klipom nalazi se idealni plin volumena 2 L pri tlaku od 101 kPa. Kada klip stisnemo, tlak se u posudi za 50 % početne vrijednosti tlaka. Za koliko se litara smanjio volumen tog plina pri stalnoj temperaturi?
18. Balon volumena 85 L napunjen je plinom u sobi temperature $22\text{ }^\circ\text{C}$ pri tlaku od 100 kPa. Koliki će biti volumen balona kada ga vani pustimo do visine gdje je temperatura $0\text{ }^\circ\text{C}$, a tlak zraka 25 kPa?
19. Pri normiranom tlaku i temperaturi $0\text{ }^\circ\text{C}$ pustimo balon na visinu jednake temperature i tlaka 90 kPa. Koliko se puta povećao volumen balona?
20. Lopta polumjera 20 cm napunjena je zrakom temperature $22\text{ }^\circ\text{C}$ i pri tlaku od 2 bara. Koliko se molekula zraka nalazi u lopti?

Oživite struku u svojoj učionici!

Za nastavnike i učenike Alfini digitalni udžbenici dostupni su na sveobuhvatnoj digitalnoj obrazovnoj platformi mozaLearn, koja uključuje sustav mozaWeb i aplikaciju mozaBook u razvoju tvrtke MozaiK Education. Prvi smo partnerski izdavač koji je prije deset godina započeo izdavanje digitalnih udžbenika, lokalizaciju i prilagodbu platforme te nastavnicima i učenicima u Republici Hrvatskoj omogućio korištenje ovog najboljeg virtualnog obrazovnog rješenja u svijetu, a više od **20 tisuća aktiviranih licenci** potvrda su da je ovo rješenje koje nastavnici uistinu koriste. Za nastavnike u strukovnim školama ovaj je sustav virtualni laboratorij, radionica i praktikum na jednoj integriranoj platformi.

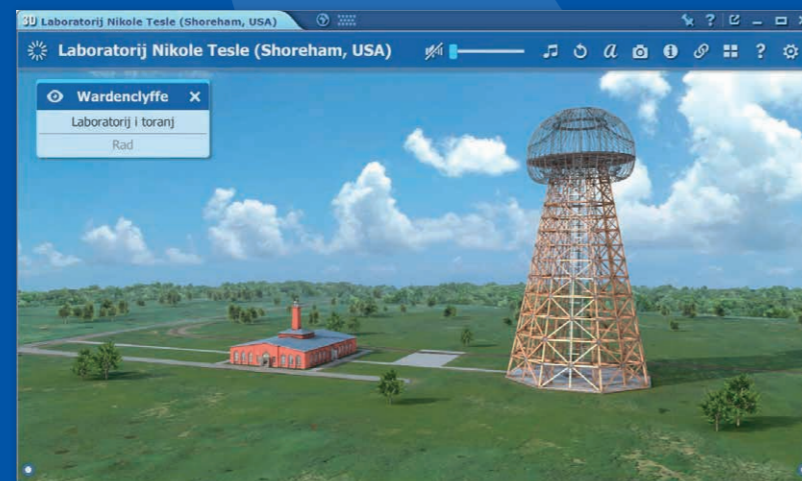
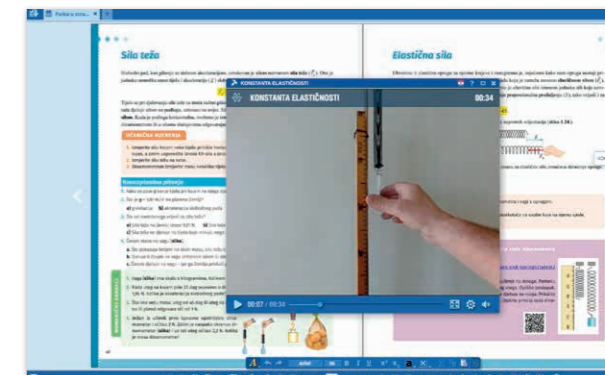
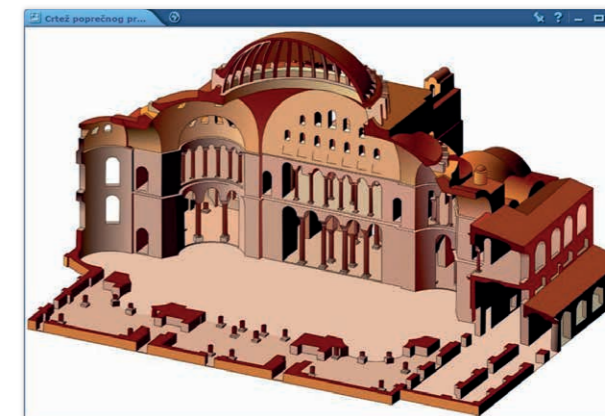
Stručna podrška

Uz Alfini udžbenik dobivate moćan i intuitivan digitalni alat, ali i partnera koji će vam pomoći da ga u potpunosti iskoristite u nastavi prema svojim potrebama i željama.

Promotor će se osobno pobrinuti za aktivaciju licenci osiguravajući da vi i vaši učenici imate nesmetan pristup svim sadržajima od prvog dana nastave. Također će provesti edukaciju prilagođenu vašim potrebama – pokazat će vam konkretne alate koji su relevantni za vaš predmet/modul.

Vizualizacija. Simulacija. Interakcija.

- **3D scene i modeli** – detaljna vizualizacija **građe ljudskog tijela** ili **mehanike krutog tijela** čini učenje interaktivnijim
- **interaktivni alati** – olakšavaju razumijevanje **termodinamike, fluida** ili **analitičke geometrije** uz praktične vježbe
- **kvizovi i provjere znanja** – omogućuju samoprocjenu i praćenje napretka
- **sadržaji u kontekstu struke** – znanje postaje trajnije kada je povezano s konkretnim strukovnim modulom i lokalnim kontekstom



DOBRO JE ZNATI

Svaki tiskani primjerak udžbenika sadrži umetak s aktivacijskim kôdom. Registracijom na sustav mozaWeb i aktivacijom kôda omogućuje se puni pristup digitalnom izdanju i svim uključenim digitalnim sadržajima 12 mjeseci od prijave.



SVEOBUHVAATNA PODRŠKA

Bilo da je riječ o prijavi, aktivaciji licenci ili primjeni specifičnih sadržaja i alata – tu smo za vas. Javite nam se s povjerenjem putem obrasca za kontakt na našim mrežnim stranicama ili izravno svom promotoru.

Obrazac za kontakt



Vaš osobni prostor u kojem vas sve čeka spremno.

Alfa Kabinet novi je virtualni sustav za metodičku podršku nastavnicima, prostor osmišljen da bude vaš glavni saveznik u pripremi i izvođenju nastave. Sve što vam je potrebno – od osnovnih nastavnih resursa do specifičnih materijala za strukovne škole – nalazi se na jednom mjestu, dostupno u nekoliko klikova.

Inovativno, personalizirano sučelje koje organiziraju naši urednici omogućuje brz i lak pristup metodičkim materijalima i informacijama te potpuno nov način pretraživanja, otvaranja i preuzimanja.



Virtualni prostor za Alfa-nastavnike

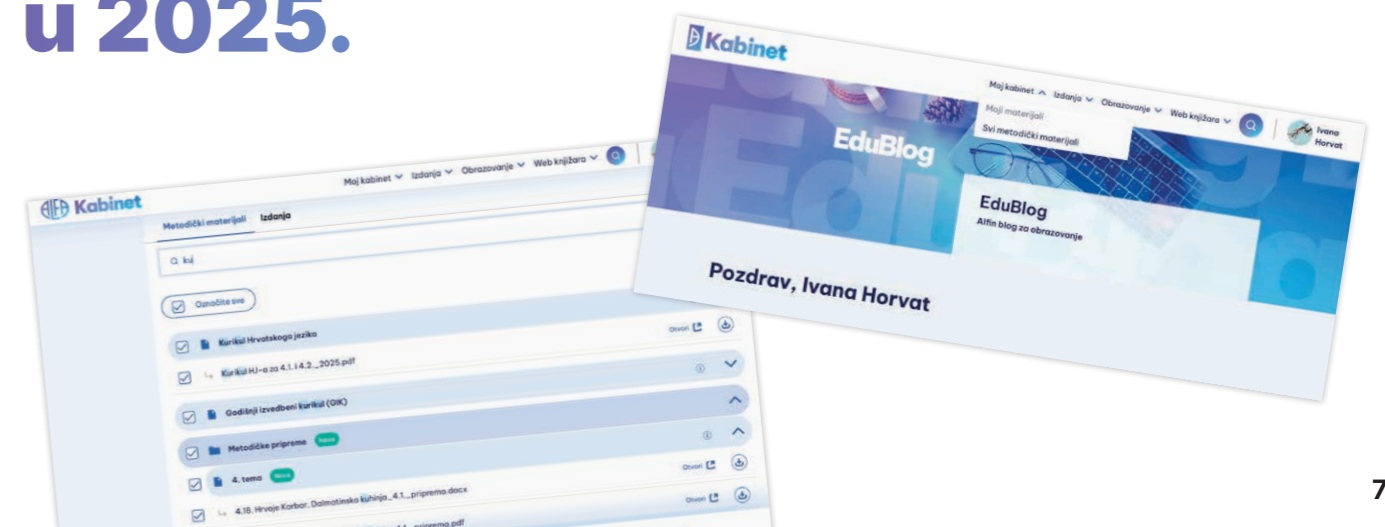
Svaki nastavnik zaslužuje svoj kabinet. Uz odabir Alfinih udžbenika dobivate personaliziran i vrhunski opremljen digitalni prostor.



Zavirite u dio onoga što smo vam pripremili!

41 807
preuzetih
materijala
u 2025.

**BROJKE
DOKAZUJU
STVARNU
KORIST!**



DOBRO JE ZNATI

Ako ste bili korisnik nekadašnjeg sustava Alfa Portal, ne trebate otvarati novi račun, već se možete odmah prijaviti podacima kojima ste tamo registrirani (adresa e-pošte i postojeća lozinka).

Ako ste korisnik Alfinih udžbenika, a nemate postojeći korisnički račun, možete se registrirati na kabinet.alfa.hr/registracija, no puni pristup dobit ćete tek nakon naše izravne provjere autentičnosti i odobrenja. Ako niste korisnik Alfinih udžbenika, a želite pogledati što nudimo, možete pristupiti svim informacijama o metodičkoj podršci na adresi kabinet.alfa.hr, ali bez mogućnosti otvaranja i preuzimanja.

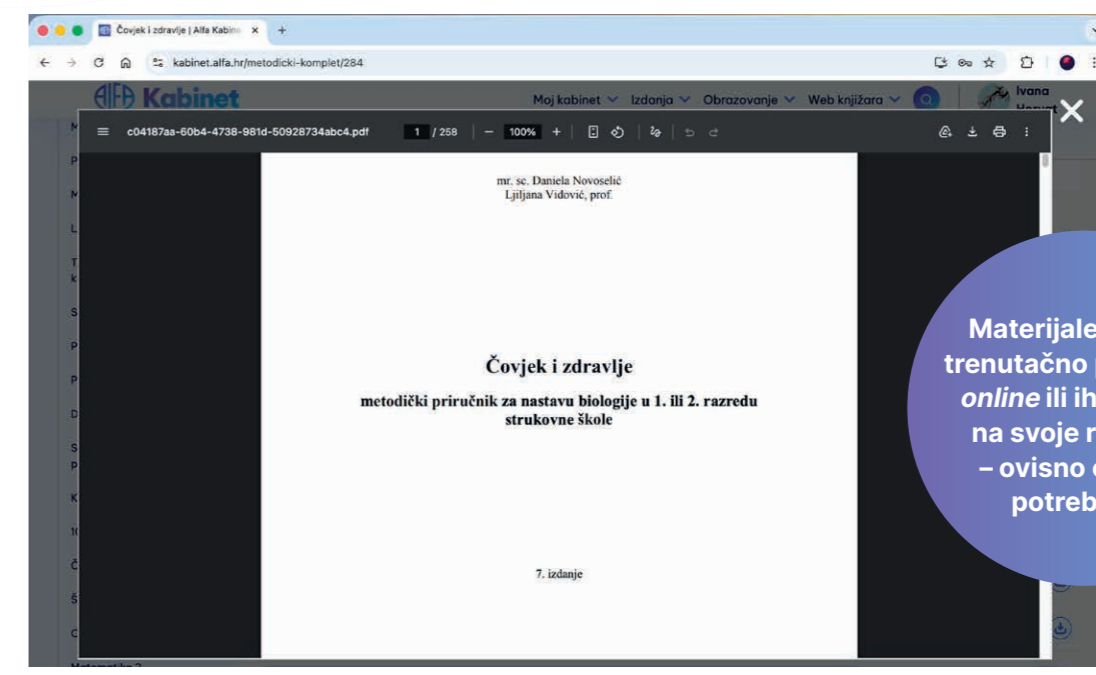
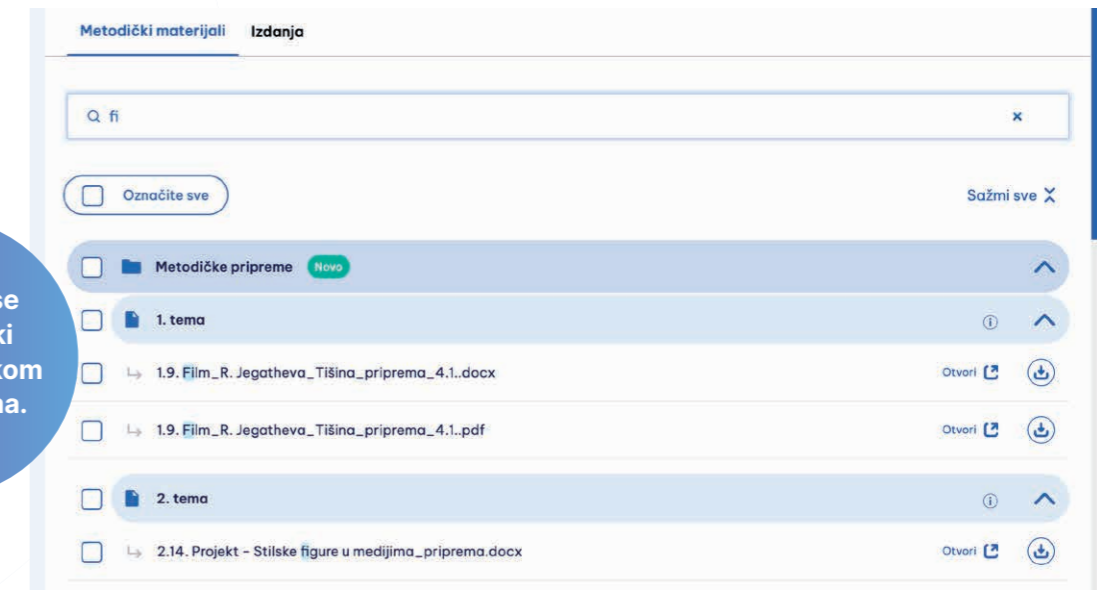
TEHNIČKA PODRŠKA

Trebate pomoć pri registraciji ili ste zaboravili podatke za prijavu? Naš tim stručnih suradnika – promotora stoji vam na raspolaganju, a javiti nam se možete i putem obrasca za kontakt.

Obrazac za kontakt

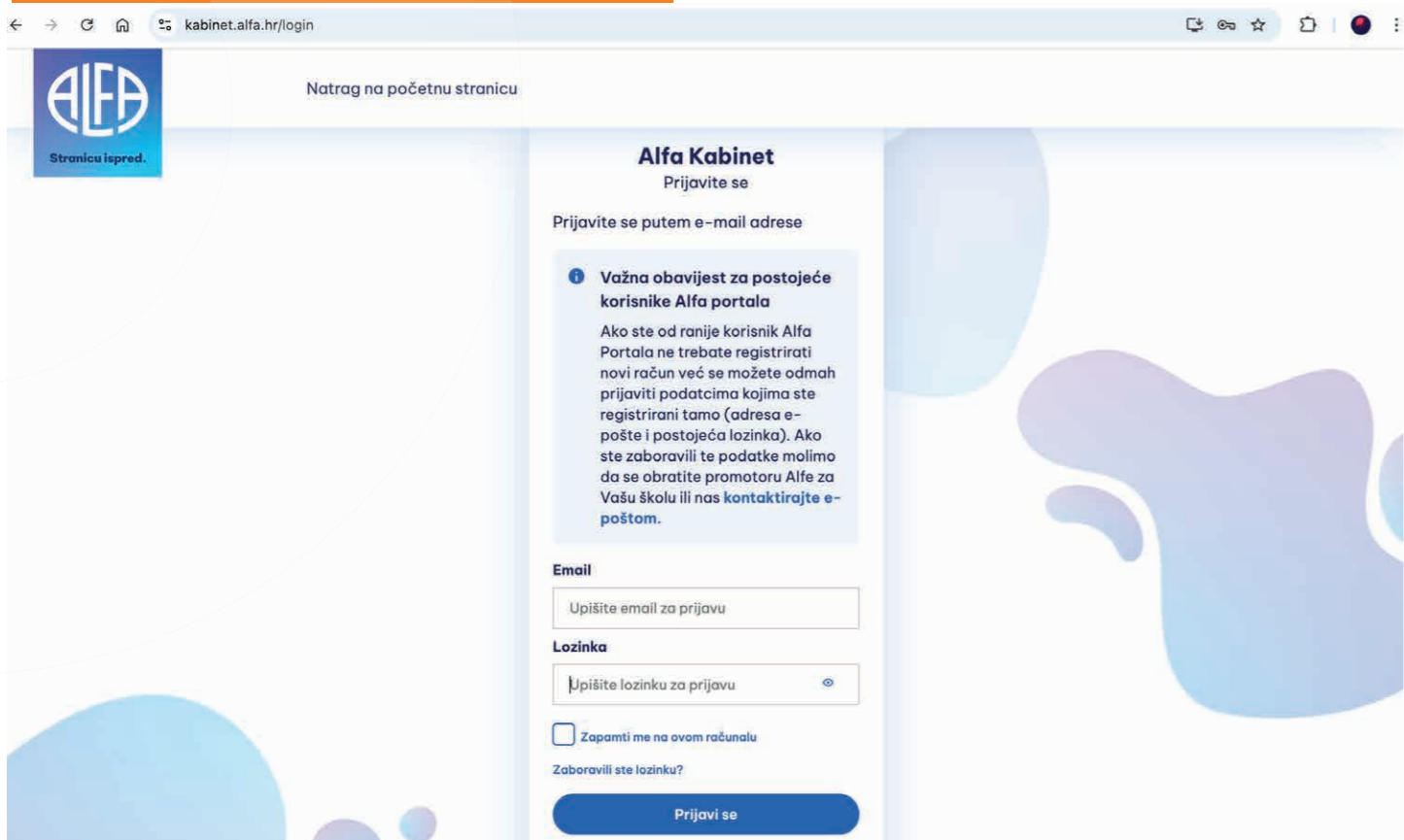


Materijali se automatski filtriraju tijekom unosa pojma.



Materijale možete trenutno pregledati online ili ih preuzeti na svoje računalo – ovisno o vašim potrebama.

Brzo i jednostavno označite više datoteka te ih preuzmite skupno, umjesto jednu po jednu.



Za pristup metodičkim materijalima koji prate Alfin udžbenik potrebna je registracija/prijava.

Alfa edukacije inovativan su i jedinstven pristup stručnom usavršavanju koji već šestu godinu zaredom postavlja standarde u obrazovnom sustavu. Naš bogat program besplatnih *online* edukacija obuhvaća sve relevantne aspekte vašeg rada: od analize novih kurikula do tema iz psihologije, unaprjeđenja radnog okruženja i komunikacije s roditeljima.



U ovoj webinarској sezoni održali smo

30 edukacija na kojima se stručno usavršilo gotovo

20 000 sudionika.

Iznimno smo ponosni što je više od

90%

sudionika naše edukacije ocijenilo čistom peticom!

Interaktivno iskustvo: aktivno sudjelovanje u realnom vremenu omogućuje vam izravnu komunikaciju s predavačima i razmjenu iskustava s kolegama.

Potvrda o stručnom usavršavanju: svako sudjelovanje uživo prati potvrda* o stručnom usavršavanju koja se generira na temelju vaših podataka.

Što dobivate sudjelovanjem?

Jednostavnost pristupa: za prisustvovanje edukaciji dovoljna je samo adresa e-pošte.

Trajna dostupnost: sve snimke edukacija pohranjene su u našoj digitalnoj bazi na Alfa Kabinetu.

PPT prezentacije i dodatni materijali: uz svako predavanje osigurani su materijali koje možete preuzeti i koristiti.

POSTANITE PREDAVAČ!

Imate li dragocjeno iskustvo ili primjer iz prakse koji želite podijeliti s kolegama? Pozivamo vas da se pridružite našem timu predavača!

- **Honorirana suradnja:** cijenimo i honoriramo vaš uloženi trud, iskustvo i znanje.
- **Stručna vidljivost:** podijelite svoje znanje s velikom zajednicom nastavnika i ostvarite **potvrdu o održanom predavanju** za napredovanje u struci.



Želite biti predavač?
Želite da održimo edukaciju na određenu temu?
Ne dobivate e-poštu s pozivima na edukacije?

Pišite nam na edukacije@alfa.hr.



DOSTUPNE SVIMA, BILO KADA I NA BILO KOJEM UREĐAJU!

Želimo čuti vaše ideje! Pomozite nam pripremiti edukacije prilagođene vašim potrebama. Javite nam se sa svojim prijedlozima tema!

DOJMOVI SUDIONIKA

Alfine edukacije su pravo osvježanje u odnosu na druge. Hvala Vam!

Jako mi se sviđelo što su naši komentari dio predavanja, te se traži aktivno sudjelovanje, koje ipak ne remeti dinamiku predavanja. Također, mnoštvo primjera koji nam pomažu u detekciji našeg stanja.

Alfine edukacije su među najkvalitetnijim oblicima stručnog usavršavanja. Pohvale za cijeli stručni tim!

Usavršavanje je bilo na najvišem mogućem nivou, bolje ni ne može.



Pred nama je niz novih, specijaliziranih edukacija osmišljenih upravo prema zahtjevima vašeg predmeta i specifičnostima strukovne nastave.

Nadoknadite propušteno i planirajte usavršavanje!



* Potvrda se izdaje za sudjelovanje na edukaciji uživo te se ne može dobiti za pregled snimke.

** Ako želite potvrdu, potrebno je u prijavnom obrascu upisati tražene informacije.

Omiljeni blog za čitanje o struci.

EduBlog je vaša polazišna točka za profesionalni rast, inspiraciju i informiranje. To je digitalni prostor u kojem se znanstvene spoznaje pretvaraju u konkretna i primjenjiva rješenja za vašu svakodnevnicu u učionici. Na EduBlogu ćete, između ostalog, pronaći ključne informacije o našim novim udžbenicima te sveobuhvatnoj metodičkoj podršci koja će vam olakšati i unaprijediti rad s učenicima u srednjim strukovnim školama.



PSIHOLOGIJA I ŠKOLA

ŠKOLSKI STRESORI – najčešći uzroci stresa među učiteljima i nastavnicima

Početak nove školske godine je iza nas, planovi i projekti osmišljeni i predani, prvi roditeljski sastanci održani, prve ocjene upisane u e-Dnevnik, možda su već izrečene i prve pedagoške mjere. Kakav nam je bio početak školske godine? Hoće li nam (i) ova godina biti stresna?

MATEMATIKA I NADA – međunarodni projekt koji povezuje znanje, kreativnost i optimizam

U prethodnih nekoliko članaka osvrnuli smo se na školski stres odnosno na značajke stresa u učiteljskim i nastavničkim profesijama. Kako si možemo pomoći ako već primjećujemo da smo pod stresom? Stres na radnom mjestu sam po sebi ne može biti smanjen neposredno, nego izravno – promjenom određenih postupaka, navika, vještina, stavova i načina razmišljanja. Nimalo lak zadatak. No u nastavku ćemo pobliže pogledati neke od preporučenih strategija koje mogu utjecati na smanjenje stresa na radnom mjestu.

ŠKOLSKI STRESORI: osnovne strategije i prva pomoć

U prethodnih nekoliko članaka osvrnuli smo se na školski stres odnosno na značajke stresa u učiteljskim i nastavničkim profesijama. Kako si možemo pomoći ako već primjećujemo da smo pod stresom? Stres na radnom mjestu sam po sebi ne može biti smanjen neposredno, nego izravno – promjenom određenih postupaka, navika, vještina, stavova i načina razmišljanja. Nimalo lak zadatak. No u nastavku ćemo pobliže pogledati neke od preporučenih strategija koje mogu utjecati na smanjenje stresa na radnom mjestu.

Izazovi rada s darovitim učenicima

Kada planiram rad s učenicima, razmišljam o razreda kao cjelini, o čemu pojednako učenicima neko područje zanimam više ili o njemu zna mnogo više od drugih – više nego što piše u udžbeniku, više nego što se za tu dob očekuje odnosno što propisuje predmetni kurikulum. Što je tada potrebno učiniti? Učitelj tada mora promisliti svoj plan i prilagoditi ga interesima djece.

OBOGAĆIVANJE U RADU S DAROVITIMA – korak treći

U ovom članku pobliže ćemo promotriti treći korak u Francuskom SEM modelu obogaćivanja u radu s darovitim učenicima. Podjelim se, prvi korak odnosio se na izlaganje iskustvima i istraživanje interesa, drugi korak temeljio se na odgojnoj vještini, a u ovoj obogaćivačkoj Tip 3 jest autonomija.

Između redaka – razgovori koji nedostaju

U svijetu obrazovanja postoje teme o kojima svi imaju mišljenje, ali rijetko tko sjedi za istim stolom kako bi o njima otvoreno razgovarao. Češće se upire prstom i traži krivca nego što se traži rješenje. Upravo zato, Alfina uređivačka ekipa, između redaka – razgovori koji nedostaju, a prva postaja na tom putu tema je koja godinama izaziva polemike: gramatika.

OBOGAĆIVANJE U RADU S DAROVITIMA – korak drugi

Obogaćivanje je najčešći i najzastupljeniji pristup u odgojno-obrazovnom radu s darovitim učenicima. Razni njegovi realizirani načini se u činjenicama da se može primjenjivati u postojećem/razrednom odgoju, ne zahtijeva velike organizacijske i financijske resurse i učitelji omogućuju fleksibilnost u proširivanju i produbljivanju obrazovnih sadržaja.

ŠKOLSKI ESEJ NA DRŽAVNOJ MATURI

AKTUALNO

Počinje ciklus Alfinih edukacija o školskome eseuju na državnoj maturi

Serijski Alfinih edukacija namijenjenih pripremanju za državnu maturu počinje u srijedu 11. veljače 2026. godine u 19 sati. Šest srijeda (od 11. veljače do 29. travnja) u istome terminu moći ćete potpuno besplatno steći uvid u oblikovanje (pravilni) školskoga esejja – prepoznati tipične pogreške u njegovoj strukturi te uvidjeti kako oblikovati opaske (očekivanja) prema kontrolnome zadatku za školski esej, tradicije strukture. Osim što će naglasak biti na vrednovanju školskoga esejja, pri čemu će se upotrijebiti stvarni učenički uradci različite kvalitete kako bi se postupak vrednovanja što zornije prikazao.

Znanstveno-stručni skup „Kulturna baština kao prilika za odgoj i obrazovanje“ u Pleternici

Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu u partnerstvu najavljuje održavanje znanstveno-stručnog skupa „Kulturna baština kao prilika za odgoj i obrazovanje“. Skup će se održati 20. i 21. veljače 2026. u Pleternici, a namijenjen je učiteljima, odgovarajućima, stručnim suradnicima i znanstvenicima.

Zašto danas tako lako propuštamo prilike za profesionalni rast

Već nekoliko dana razmišljam kako najaviti veliki događaj koji nam sjedi – EP Summit 2026 u organizaciji našeg partnera Elsevier Publishinga. Svrhama sam koliko je lako da vam ovaj događaj jednostavno promakne. Ne zato što nije važan, nego zato što često ne zasitanemo, ne pogledamo o čemu se točno radi i ne zapitamo se „what’s in there for me?“

Znanost i struka: čitajte o najnovijim spoznajama iz područja obrazovanja, školske psihologije, pedagogije, darovitosti i ostalih odgojno-obrazovnih tema.

Inspiracija iz učionice: pronađite poticajne priče iz hrvatskih i svjetskih škola te intervjuje s vodećim stručnjacima.

Aktualno i praktično: saznajte sve o primjeni modularne nastave, pripremi za državnu maturu i strukovnom obrazovanju.

Podrška u radu: pratite novosti o materijalima i digitalnim alatima koji vam pomažu u svakodnevnim izazovima.

Imate li dragocjeno iskustvo iz **strukovne nastave**, uspješan primjer iz učionice ili stručni rad koji želite podijeliti s kolegama? **Pridružite se našoj zajednici autora!**

- **Dijelite znanje:** objavite svoj rad na platformi koju prate tisuće vaših kolega širom Hrvatske.
- **Nagrada za izvrsnost:** cijenimo profesionalni doprinos struci te honoriramo odabrane autorske tekstove.
- **Stručni ugled:** gradite svoj profesionalni identitet uz punu podršku našeg uredništva.

PIŠTE NAM!

Za sve oblike suradnje pišite nam na edublog@alfa.hr.

Povjerenje koje raste

Naši se čitatelji vraćaju: visoka razina angažmana i detaljno praćenje naših stručnih tekstova govore nam da obuhvaćaju upravo ono što vam je potrebno.



ŠKOLSKI PERISKOPI INTERVJU

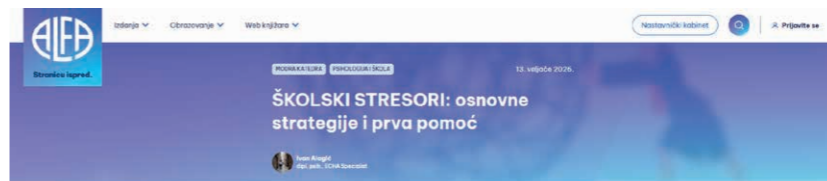
Peter Liljedahl: „Matematiku ne treba oponašati ni pamtiti nego razumjeti!“

Hrvatsko izdanje priručnika „Building Thinking Classrooms“, objavljeno pod nazivom „Stvaranje učionice matematičkog promišljanja“, donosi inovativne metode poučavanja. Autor Peter Liljedahl s oduševljenjem je prihvatio poziv da u Alfa-učionici održi radionicu za učitelje i nastavnike, podijelivši svoju viziju modernog pristupa matematici.

U protekloj godini ostvarili smo porast čitanosti od 200 %!

POSTANITE KOLUMNIST!

Nastavnicima koji žele kontinuirano dijeliti svoja razmišljanja i graditi prepoznatljiv stil nudimo mogućnost suradnje u obliku autorske kolumne.



U prethodnih nekoliko članaka osvrnuli smo se na školski stres odnosno na značajke stresa u učiteljskim i nastavničkim profesijama. Kako si možemo pomoći ako već primjećujemo da smo pod stresom? Stres na radnom mjestu sam po sebi ne može biti smanjen neposredno, nego izravno – promjenom određenih postupaka, navika, vještina, stavova i načina razmišljanja. Nimalo lak zadatak. No u nastavku ćemo pobliže pogledati neke od preporučenih strategija koje mogu utjecati na smanjenje stresa na radnom mjestu.



Skenirajte i pročitajte!

Zašto Alfa?

**JER NUDIMO
NAJBOLJE ZA
STRUKU OD
STRUKE!**

Desetljeća iskustva u izradi udžbenika na svim obrazovnim razinama. S nastavnicima smo prošli sve reforme i postali siguran oslonac u svakoj promjeni sustava.

Naše materijale pišu timovi u kojima teoretičari surađuju s praktičarima. Rezultat je sadržaj koji je stručno utemeljen i 100 % primjenjiv u učionici.

Personalizirana metodička podrška. Razvili smo sustav koji prepoznaje vaše potrebe i nudi baš ono što vam treba.

Digitalna rješenja s ciljem. Razvijamo tehnologiju koja rješava probleme, a ne stvara nove.

Ne ostavljamo vas na cjedilu nakon isporuke udžbenika. Naši stručni suradnici – promotori tu su za svako pitanje i konkretnu pomoć na terenu.

Vaš je napredak i naš. Pratimo vas edukacijama i informacijama koje vašu pripremu čine jednostavnijom, nastavu učinkovitijom, a vas sigurnijima i zadovoljnijima.

Odabir Alfe nije samo odabir udžbenika – to je ulazak u partnerstvo s timom koji razumije svaki vaš radni dan.



INFORMACIJE I ODGOVORI



SKENIRAJTE I PITAJTE!

Naš tim odgovorit će na sva vaša pitanja u najkraćem roku.



Nisam sigurna/siguran komu se obratiti za pomoć.

Vaša je prva adresa vaš stručni suradnik – promotor. On je zadužen za vašu školu i pružit će vam svu potrebnu podršku. Također, uvijek nam se možete javiti putem obrasca za kontakt na kabinet.alfa.hr/kontakt.

Mogu li pregledati ogledni primjerak udžbenika?

Naravno. Svaki nastavnik dobiva svoj ogledni primjerak.

Imam li pravo na digitalni udžbenik?

Da! Dok ste god Alfin korisnik, uz tiskani udžbenik imate pravo i na licencu za digitalno izdanje.

Koja je razlika između Alfa Kabineta i mozaBooka?

Alfa Kabinet je *web*-mjesto za metodičku podršku nastavnicima, dok je mozaBook interaktivna softverska platforma s digitalnim udžbenicima i alatima za izvođenje nastave.

Želim saznati više o metodičkoj podršci koja prati udžbenik.

Sva metodička podrška u digitalnom obliku nalazi se na Alfa Kabinetu, a vaš promotor rado će vam predstaviti sve što je uredništvo pripremio za vas.

Koliko se čeka odobravanje pristupa Alfa Kabinetu?

Vaš zahtjev za registraciju bit će obrađen u najkraćem mogućem roku, a najkasnije unutar 72 sata.

Kako mogu provjeriti što Alfa nudi ako još ne koristim vaše udžbenike?

Na Kabinetu možete dobiti cjelokupan uvid u našu metodičku podršku. Iako bez statusa korisnika nećete moći otvarati i preuzimati materijale, sustav je otvoren za pregled kako biste se uvjerali u širinu i kvalitetu onoga što nudimo.

Mogu li kontaktirati predmetno uredništvo?

Naravno! Uredništva su vam na raspolaganju putem e-pošte ili se možete pridružiti našim stručnim grupama na Facebooku za izravnu komunikaciju

Mogu li postati autor na EduBlogu ili predavač na Alfa edukacijama?

Naravno! Uvijek smo u potrazi za nastavnicima koji žele podijeliti svoje znanje i primjere dobre prakse. Ako želite postati dio našeg tima autora ili predavača, javite nam se na edukacije@alfa.hr ili edublog@alfa.hr.

Je li Alfina podrška jednako kvalitetna i u srednjim školama kao u osnovnim?

Apsolutno! Iako nas mnogi vezuju uz osnovnu školu, naša metodička podrška za srednje škole razvija se gotovo jednako dugo. Već tri desetljeća stvaramo materijale koji su prilagođeni specifičnostima srednjoškolskog obrazovanja osiguravajući nastavnicima istu razinu izvrsnosti na koju su navikli naši osnovnoškolski korisnici.

Zašto je Alfa siguran i pouzdan odabir?

Zato što spajamo dugogodišnju tradiciju, znanje vrhunskih autora i najmodernije obrazovne trendove uz najsnažniju mrežu podrške na terenu.

Uvijek isporučujemo ono što obećamo. Na nas možete računati od prvog dana nastave do kraja školske godine, uz materijale koji su pomno promišljeni i pravovremeno dostupni.



